

Theoretische Beschreibung von Reverse-Bonuszertifikaten

Version 1 (3.12.2011)

Ulrich Leuthäusser

In dieser Arbeit werden Reverse-Bonuszertifikate (RBZ) detailliert besprochen und an Beispielen erläutert. Es wird gezeigt, dass sich ihre statistischen Eigenschaften auf die von Bonuszertifikaten (BZ) abbilden lassen. Die Eigenschaften wären identisch, wenn das RBZ durch eine Spiegelung in den logarithmischen Preisen aus einem BZ hervorgehen würde. Das RBZ ist jedoch ein in den linearen Preisen mit Hilfe eines Spiegelungspunkts S erzeugtes BZ. S , das beim BZ gar nicht auftaucht, bestimmt zusammen mit der Barriere und dem Bonuslevel den Charakter des RBZ. S ist hauptsächlich verantwortlich für die Unterschiede zum BZ, die, wie auch die Gemeinsamkeiten, in dieser Arbeit genauer diskutiert werden.

Weiterhin wird gezeigt, wie der faire Preis eines RBZ berechnet werden kann. Dieser spielt beim RBZ eine noch wichtigere Rolle als bei einfacher konstruierten Zertifikaten wie Discountzertifikaten und auch Bonuszertifikaten, weil Untersuchungen hier große Abweichungen zu realen RBZ Preisen zeigen.

Folgende Bezeichnungen werden benötigt:

t	Laufzeitende des Reverse-Bonuszertifikats (RBZ)
$P(0) = P_0$	Preis des Underlyings U zum Anfangszeitpunkt
$P(t) = P_e$	Preis von U zum Laufzeitende
$y_U = \ln(P_e/P_0)$	logarithmierter Endpreis von U bezogen auf P_0
r_0	risikolose Rendite pro Zeiteinheit
$\bar{K}(0) = \bar{K}_0$	Preis des RBZ zum Anfangszeitpunkt
$\bar{K}(t) = \bar{K}_e$	Preis des RBZ zum Laufzeitende
\bar{A}	absorbierende Barriere des RBZ
\bar{B}	Bonuslevel des RBZ
S	Spiegelungspunkt
\bar{K}_e^{\max}	maximaler Endkurs des RBZ gleich $2S$
$s = S/P_0$	auf P_0 bezogenes S
$\bar{R} = \bar{K}_e/\bar{K}_0 - 1$	Rendite des RBZ in der Zeit t
$\bar{a} = \ln(\bar{A}/P_0)$	absorbierende Barriere bezogen auf P_0 , logarithmiert
$\bar{b} = \ln(\bar{B}/P_0)$	Bonuslevel bezogen auf P_0 , logarithmiert
$y_{RB} = \ln(\bar{K}_e/P_0)$	log. Endpreis des RBZ bezogen auf P_0
$K(0) = K_0$	Preis des Bonuszertifikat (BZ) zum Anfangszeitpunkt
$K(t) = K_e$	Preis des BZ zum Laufzeitende t
A	absorbierende Barriere des BZ
B	Bonuslevel des BZ
$R = K_e/K_0 - 1$	Rendite des BZ in der Zeit t
$a = \ln(A/P_0)$	absorbierende Barriere bezogen auf P_0 , logarithmiert
$b = \ln(B/P_0)$	Bonuslevel bezogen auf P_0 , logarithmiert
$k_e = K_e/P_0$	Endpreis des BZ bezogen auf P_0
$y_B = \ln(k_e)$	logarithmierter Endpreis des BZ bezogen auf P_0

Definition des Reverse Bonuszertifikats (RBZ)

Der Endpreis \bar{K}_e des RBZ als Funktion vom Endpreis P_e des Underlyings U ist gegeben durch

$$\bar{K}_e = \begin{cases} \bar{K}_e^{\max} - \bar{B} & \text{wenn } \max(P(t')) < \bar{A} \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } P_e \geq \bar{B} \\ \bar{K}_e^{\max} - P_e & \text{sonst} \\ 0 & \text{wenn } P_e \geq \bar{K}_e^{\max} \end{cases} \quad (1)$$

Wenn P_e gegen Null geht, erreicht das RBZ seinen Maximalwert \bar{K}_e^{\max} , wird dagegen P_e größer gleich \bar{K}_e^{\max} , wird der RBZ Preis Null (siehe Abb.1).

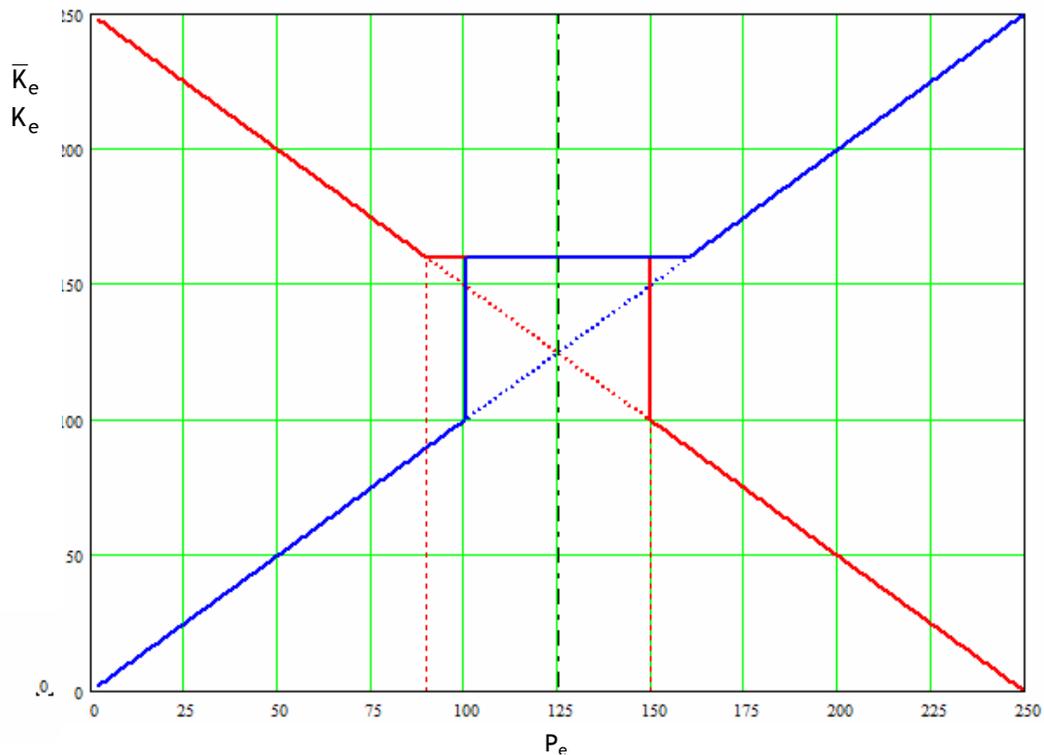


Abb.1: Die rote Kurve stellt die möglichen Endkurse \bar{K}_e eines RBZ als Funktion der Endkurse von U mit der Wahl $\bar{A} = 150$, $\bar{B} = 90$ und $S = 125$ dar. Ist der Endkurs von U z.B. $P_e = 200$, dann ist $\bar{K}_e = 2S - P_e = 50$ und umgekehrt. Liegt P_e zwischen \bar{B} und \bar{A} , dann kann \bar{K}_e je nach Kursverlauf von U innerhalb der Zeit t die Werte $2S - \bar{B}$ oder $2S - P_e$ annehmen. Spiegelt man die Endkurskurve des RBZ am Punkt $S = 125$, dann erhält man die blaue Kurve der Endkurse K_e eines BZ mit $A = 2S - \bar{A} = 100$ und $B = 2S - \bar{B} = 160$.

Spiegelt man \bar{K}_e an einer vertikalen Linie, die die P_e -Achse beim Spiegelungspunkt S schneidet, für den die Beziehung

$$\bar{K}_e^{\max} = 2S$$

gilt, dann erhält man ein Bonuszertifikat mit

$$K_e = \begin{cases} B = 2S - \bar{B} & \text{wenn } \min(P(t')) > 2S - \bar{A} = A \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } P_e \leq B \\ P_e & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Rendite des RBZ lautet

$$\bar{R} = \begin{cases} \frac{2S - \bar{B}}{\bar{K}_0} - 1 & \text{wenn } \max(P(t')) < \bar{A} \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } P_e \geq \bar{B} \\ \frac{2S - P_e}{\bar{K}_0} - 1 & \text{sonst} \\ -1 & \text{wenn } P_e \geq 2S \end{cases} \quad (2)$$

wobei $\bar{R}_B = \frac{2S - \bar{B}}{K_0} - 1$ die Rendite im Bonusfall ist.

Im Vergleich dazu lautet die Rendite des BZ

$$R = \begin{cases} \frac{B}{K_0} - 1 & \text{wenn } \min(P(t')) > A \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } P_e \leq B \\ \frac{P_e}{K_0} - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Gegensatz zum BZ, dessen Rendite im Prinzip beliebig groß werden kann, hat die Rendite des RBZ eine obere Grenze: $\bar{R}_{\max} = \frac{2S}{K_0} - 1$.

Die statistischen Eigenschaften des RBZ

Wie schon bei der Diskussion des Bonuszertifikats¹ wird angenommen, dass U einem Random Walk (RW) in der logarithmischen Variablen $y_U = \ln(P_e/P_0)$ folgt:

$$dy_U(t) = (\mu_r - \frac{1}{2}\sigma_r^2)dt + \sigma_r dW(t) \quad (3)$$

μ_r und σ_r lassen sich durch die Jahresrenditen $E[R(t_y)]$ und die Varianz $V[R(t_y)]$ von U pro Jahr ausdrücken:

$$\mu_r = \frac{1}{t_y} \ln(1 + E[R(t_y)]) \quad \sigma_r^2 = \frac{1}{t_y} \ln \left(1 + \frac{V[R(t_y)]}{(1 + E[R(t_y)])^2} \right). \quad (4)$$

dW ist das Inkrement des Wienerprozesses W . $\mu = \mu_r - \frac{1}{2}\sigma_r^2$ wird als Drift bezeichnet.

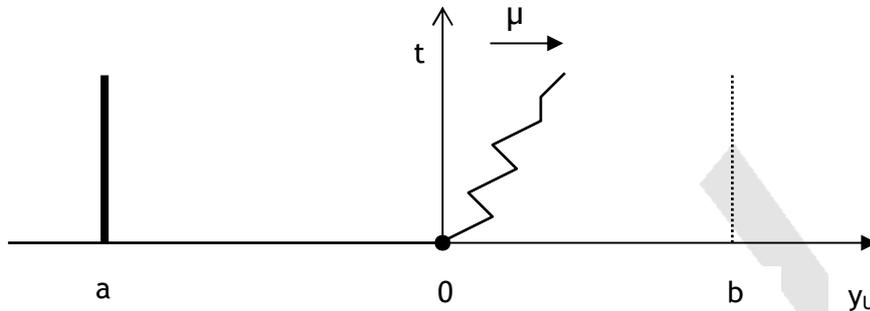
Nach der Zeit t hat y_U mit dem Startwert $y_U(0)=0$ die Verteilung

$$f(y_U, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2 t}} \exp \left(-\frac{(y_U - (\mu_r - \frac{1}{2}\sigma_r^2)t)^2}{2\sigma_r^2 t} \right) \equiv \text{No}(y_U, \mu t, \sigma_r \sqrt{t}) \quad (5)$$

mit No als Bezeichnung für die Normalverteilung.

¹ U. Leuthäusser, [Theoretische Beschreibung von Bonuszertifikaten](#) (2011)

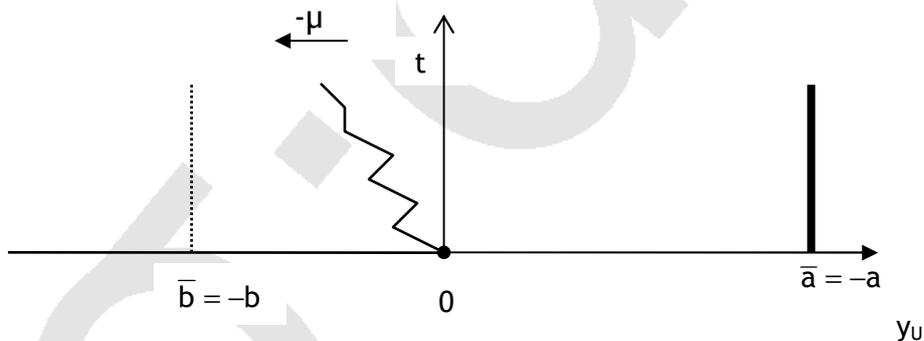
Dieser RW führt zu einem BZ, wenn die nachfolgend skizzierte Situation mit einem Bonuslevel $b > 0$ (zwar nicht notwendig, aber in der Regel größer 0), einer absorbierenden Barriere $a < 0$ und einem positiven Drift μ vorliegt:



Die logarithmischen Endkurse des BZ sind dann gegeben durch:

$$y_B(t) = \begin{cases} b & \text{wenn } \min(y_u(t')) > a \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } y_u(t) \leq b \\ y_u(t) & \text{sonst} \end{cases} \quad (6)$$

Wechselt man die Vorzeichen von a , b und μ , so dass $\bar{a} = -a$ und $\bar{b} = -b$, erhält man einen RW zwischen $\bar{a} > 0$ und $\bar{b} < 0$, wie nachfolgend skizziert



mit

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} \bar{b} & \text{wenn } \max(y_u(t')) < \bar{a} \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } y_u(t) \geq \bar{b} \\ y_u(t) & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

Dieser RW \hat{y} mit einem Bonuslevel \bar{b} , einer absorbierenden Barriere \bar{a} ($\bar{a} > \bar{b}$) und $-\mu$ beschreibt die RBZ Situation und führt zu gespiegelten Pfaden. Die Verteilung von \hat{y} ist daher die um 0 gespiegelte Bonusverteilung mit den Parametern μ , a und b . Der

Bonuspeak $\delta(y_B - b)$ der Bonusverteilung, der bei positiven $y_B = b$ liegt, geht über in den Peak $\delta(\hat{y} - \bar{b})$, liegt also bei negativen $\hat{y} = -b$.

Wird nun das Vorzeichen von \hat{y} umgedreht, erhält man eine Art RBZ mit den Werten $y_I = -\hat{y}$, das hier als Invers-Bonuszertifikat (IBZ) bezeichnet wird. Durch den Vorzeichenwechsel kommt man wieder zurück zur Verteilung f des Bonuszertifikats:

$$\hat{f}(y_I, -\mu, -a, -b) = f(y_I, \mu, a, b) . \quad (8)$$

Ein RW $y_I(t) = -y_U(t)$ mit absorbierender Barriere $\bar{a} > \bar{b}$ und $\mu < 0$ hat die gleiche Verteilung wie ein RW $y_U(t)$ zwischen einer absorbierender Barriere $a < b$ und $\mu > 0$.

y_I ist eigentlich der natürliche Reverseprozess, weil im Raum der logarithmischen Preise ein normaler RW stattfindet (mit einfachen Summen von unabhängigen gaußschen Variablen) und er daher besonders einfache Symmetrieeigenschaften hat. Basierend auf y_I wäre ein solches IBZ mit μ , \bar{a} und \bar{b} vollkommen äquivalent zu einem BZ, mit den Parametern $-\mu$, a und b .

Bei einem realen RBZ wird jedoch nicht y_I verwendet, sondern die Ersetzung

$$y_I \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2s - \exp(y_I)}\right)$$

vorgenommen. Diese Ersetzung entsteht, weil das RBZ nicht durch Spiegelung eines BZ im Raum der logarithmierten Preise gebildet wird, sondern durch die Spiegelung eines BZ in den Kursen (siehe Abbildung 1). Daher gilt für die Verteilung \bar{f} der log. Endkurse y_{RB} eines RBZ anstatt (8) die folgende, durch die obige Transformation modifizierte Verteilung

$$\bar{f}(y_{RB}, \bar{a}, \bar{b}, -\mu) \equiv f(-\ln(2s - e^{y_{RB}}), a, b, \mu) \left| \frac{e^{y_{RB}}}{2s - e^{y_{RB}}} \right| \quad (9)$$

Wenn also die BZ Verteilung bekannt ist, dann lässt sich auf einfache Weise die Verteilung des RBZ dadurch ausdrücken. Die logarithmische Transformation verformt die Verteilung zwar, aber man bekommt weiterhin für das RBZ in Abhängigkeit von \bar{a} und \bar{b} ähnliche Verteilungstypen (Quasi-Underlying, VaR-Reduktion, Wette, Quasi-Festgeld, siehe¹) wie für das BZ. Das Ungefährzeichen kommt von einer kleinen Komplikation hervorgerufen von der log. Transformation und wird später noch diskutiert.

Anstatt $y_I = -y_U$ gilt für die log. Endkurse des RBZ

$$y_{RB}(t) = \begin{cases} \ln\left(\frac{2S}{P_0} - e^{\bar{b}}\right) & \text{wenn } \max(y_U(t')) < \bar{a} \text{ für } 0 \leq t' \leq t \text{ und } y_U(t) \geq \bar{b} \\ \ln\left(\frac{2S}{P_0} - e^{y_U}\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (10)$$

was sofort aus (1) folgt. Entwickelt man (10) für $s=1$ und $b \ll 1$ und $y_U \ll 1$, erhält man in linearer Näherung den inversen Prozess $y_{RB} = y_I$. Für größere y_U ergeben sich starke Unterschiede zwischen y_I und y_{RB} , wie man in der folgenden Abbildung 2 sieht.

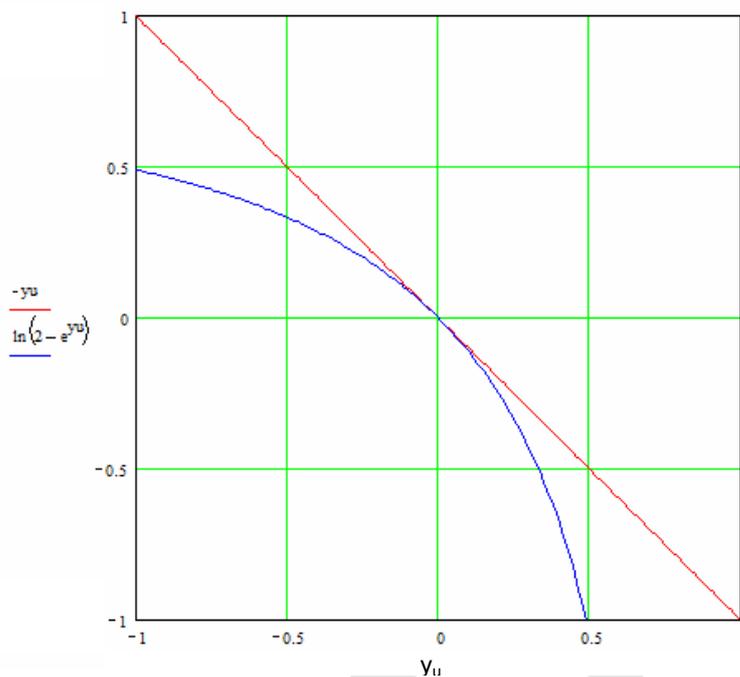


Abb.2: Ausgehend von einem RW, der z.B. ohne a zu berühren bei einem Wert $y_U=0.5$ endet, wird dieser Wert für den I-Prozess durch -0.5 ersetzt, beim Reverseprozess ($s=1$) hingegen durch $y_{RB} = -1.046$. Ist der RW nach links ins Negative gewandert, z.B. zu -0.5 , wird $y_I=0.5$ und $y_{RB}=0.33$.

In der folgenden Abbildung 3 sind die Verteilungen der log. Endkurse $\hat{f}(y)$ und $\bar{f}(y)$ gezeigt. Wie man an Gleichung (8) sieht, ist $\hat{f}(y)$ die Verteilung eines äquivalenten BZ mit den diskutierten Vorzeichenwechseln. Die blaue $\bar{f}(y)$ ist im negativen Bereich deutlich breiter als die rote $\hat{f}(y)$, während $\hat{f}(y)$ für positive Endkurse breiter als $\bar{f}(y)$ ist. Durch die spezielle Konstruktion der RBZ muss man also das Risiko größerer Verluste bei gleichzeitiger Chancenreduktion auf hohe Gewinne im Vergleich zu einem BZ in Kauf nehmen.

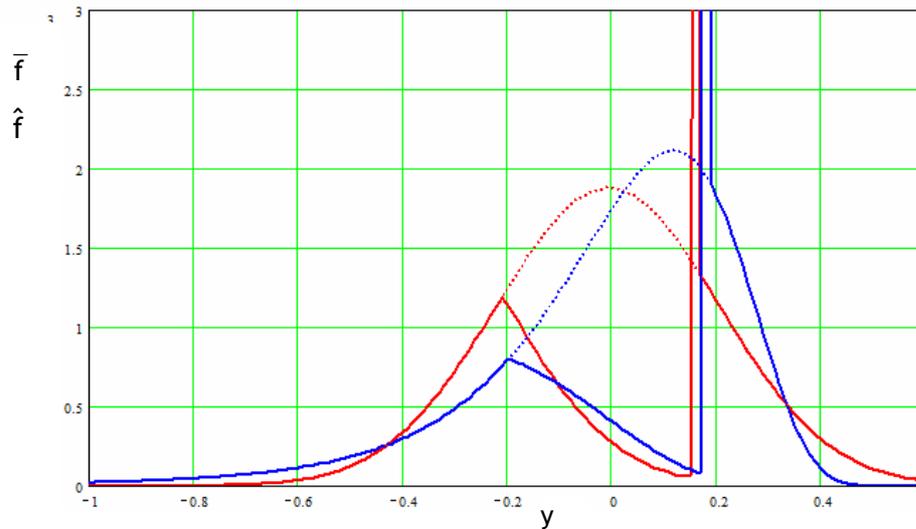


Abb. 3: Die Verteilung der logarithmischen Endkurse eines RBZ (blau). Zum Vergleich die Verteilung des inversen Prozesses y_I (rot), der einem BZ entspricht. Die gestrichelten Kurven sind die zugehörigen Normalverteilungen, die sich ergeben, wenn die absorbierenden Barrieren durchschritten wurden.

Explizite Berechnung der RBZ- Verteilung

Wichtig zur Berechnung des RBZ ist die Verteilung von U unter der Bedingung, dass y_U die Barriere \bar{a} während der Laufzeit $0 \leq t' \leq t$ nie berührt. Während diese beim BZ durch $f(y_U, t | \min(y_U(t')) > a)$ gegeben ist, lautet diese beim RBZ $\bar{f}(y_U, t | \max(y_U(t')) < \bar{a})$. Die Absorptionswahrscheinlichkeit, dass \bar{a} innerhalb der Zeit t berührt oder überschritten wird, ist $\Pi_{\bar{a}} = 1 - \text{prob}(\max(y_U(t)) < \bar{a})$. Multipliziert man $\bar{f}(y_U, t | \max(y_U(t')) < \bar{a})$ mit $1 - \Pi_{\bar{a}}$, dann kann $f(y_U, t)$ zerlegt werden in

$$\bar{f}^<(y_U, t) = \bar{f}(y_U | \max(y_U(t')) < \bar{a}) \cdot (1 - \Pi_{\bar{a}}) = \left(\text{No}(y_U, \mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu \bar{a}}{\sigma^2}} \text{No}(y_U - 2\bar{a}, \mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) \cdot \Phi(\bar{a} - y_U)$$

und

$$\bar{f}^>(y_U, t) = \bar{f}(y_U | \max(y_U(t')) \geq a) \cdot \Pi_{\bar{a}}$$

so dass gilt

$$f(y_U, t) = \bar{f}^>(y_U, t) + \bar{f}^<(y_U, t)$$

(siehe Gleichung (5)). Die Verteilung von RBZ hat 4 Anteile:

1. Gilt $\bar{b} \leq y_U < \bar{a}$ und ist \bar{a} bis zur Zeit t nie berührt worden, dann hat die Rendite \bar{R} genau den Wert der Bonusrendite \bar{R}_B beschrieben durch einen Deltapeak $\delta(\bar{R} - \bar{R}_B)$ mit dem Gewicht $\int_{\bar{b}}^{\bar{a}} \bar{f}^<(y_U, t) dy_U$. In den log. Preisen y_{RB} lautet der Deltapeak $\delta(y_{RB} - \ln(2s - e^{\bar{b}}))$.

2. Ist zur Zeit t y_U kleiner als \bar{b} ohne jemals \bar{a} berührt zu haben, erhält man den Anteil $\bar{f}^<(y_U, t) \cdot \Phi(\bar{R} - \bar{R}_B)$ mit der Stufenfunktion $\Phi(\bar{R} - \bar{R}_B)$, die zum Ausdruck bringt, dass \bar{R} immer größer ist als \bar{R}_B . Für die Preisvariable y_{RB} ergibt sich der Beitrag $\bar{f}^<(y_U, t) \cdot \Phi(y_{RB} - \ln(2s - e^{\bar{b}}))$.

3. Fand eine Berührung von \bar{a} statt, erhält man $\bar{f}^>(y_U, t) \Phi(\bar{R} + 1)$ und entsprechend $\bar{f}^>(y_U, t)$ in log. Variablen.

4. Da die Rendite \bar{R} nie kleiner als -1 werden kann, gibt es noch einen kleinen Peak bei $\bar{R} = -1$ der Form $\int_{-\infty}^{-1} \bar{f}_U^>(y_U, t) dy_U \cdot \delta(\bar{R} + 1)$.

Die RBZ-Verteilung in \bar{R} - Variablen ist damit gegeben durch

$$\bar{f}(\bar{R}) = \left[\int_{\bar{R}_A}^{\bar{R}_B} \bar{f}^<(2s - (1 - \bar{R})\bar{k}_0, t) d\bar{R} \cdot \delta(\bar{R} - \bar{R}_B) + \bar{f}^<(2s - (1 - \bar{R})\bar{k}_0, t) \Phi(\bar{R} - \bar{R}_B) + \bar{f}^>(2s - (1 - \bar{R})\bar{k}_0, t) \Phi(\bar{R} + 1) + \int_{-\infty}^{-1} \bar{f}_U^>(2s - (1 - \bar{R})\bar{k}_0, t) d\bar{R} \cdot \delta(\bar{R} + 1) \right] \left| \frac{dy_U}{d\bar{R}} \right| \quad (12)$$

mit der Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{dy_U}{d\bar{R}} \right| = \frac{\bar{k}_0}{2s - (1 + \bar{R})\bar{k}_0}$$

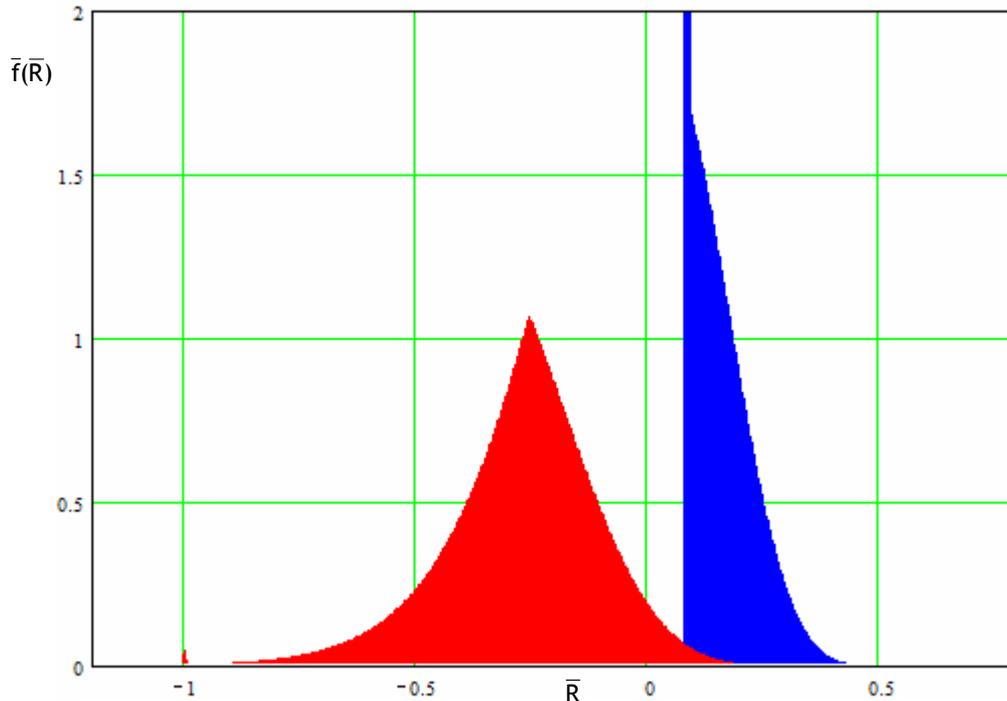


Abb.4: Verteilung der Rendite eines RBZ. Die blaue Kurve enthält den Bonuspeak und Teil 2 der Verteilungsfunktion, wie im Text besprochen. Die rote Kurve besteht aus Teil 3 und dem kleinen Peak bei -1.

In y_{RB} Variablen lautet die Verteilung

$$\bar{f}(y_{RB}) = \int_{\bar{b}}^{\bar{a}} \bar{f}^<(y_U, t) dy_U \cdot \delta(y_{RB} - \ln(2s - e^{\bar{b}})) + \int_{\ln(2s)}^{\infty} \bar{f}^>(y_U, t) dy_U \cdot \delta(y_{RB} + \infty) +$$

$$\left(\bar{f}^<(y_U(y_{RB}), t) \cdot \Phi(y_{RB} - \ln(2s - e^{\bar{b}})) + \bar{f}^>(y_U(y_{RB}), t) \right) \left| \frac{dy_U}{dy_{RB}} \right| \quad (13)$$

mit

$$y_U = \ln(2s - e^{y_{RB}}).$$

Der ungewöhnliche 2. Term folgt, weil für alle $y_U > \ln(2s)$ y_{RB} minus unendlich wird. Gewöhnlich ist er sehr klein (für $s=1$ müssen sich die Preise von U mindestens verdoppeln um einen Beitrag zu bekommen).

Die vorangegangenen komplexen Rechnungen für die Verteilungen sind nützlich, um im Folgenden den wichtigen fairen Preis eines RBZ einfach bestimmen zu können. Auch die Abhängigkeit der RBZ-Rendite von den Eingangsparametern μ_r und σ_r des Underlyings und die Risikoparameter Delta oder Theta² lassen sich nicht ohne Kenntnis der Verteilung berechnen und sind nur umständlich durch Simulation zu erhalten.

² Das Delta gibt z.B. die Sensitivität des RBZ bei Änderung des Underlyingkurses an. Das Theta gibt die Empfindlichkeit des RBZ bez. Restlaufzeitänderungen an.

Fairer Preis

Zu seiner Berechnung wird wie schon in der Arbeit über Bonuszertifikate¹ davon ausgegangen, dass der Erwartungswert der Rendite $E[R]$ einer Anlageform in einem vorgegebenen Zeitraum linear mit dem Risiko dieser Anlage ansteigt. Als Maß für das Risiko wird die Volatilität $\Sigma[R]$ genommen. Es gilt also

$$E[R] = r_0 t + c \cdot \Sigma[R] \quad (14)$$

mit r_0 als risikoloser Rendite pro Zeiteinheit.

Die Steigung $c = 0.27$ wurde mit Hilfe einer Regressionsrechnung über einige empirische Wertepaare von mittlerer Jahresrendite³ und zugehöriger Standardabweichung (Volatilität) unterschiedlicher Anlageformen ermittelt.

$$\begin{aligned} E[\bar{R}] + 1 &= \frac{1}{k_0} E[e^{y_{RB}}] = \frac{1}{k_0} E[\bar{k}_e] \\ \Sigma[\bar{R}] &= \frac{1}{k_0} \sqrt{E[e^{2y_{RB}}] - E[e^{y_{RB}}]^2} = \frac{1}{k_0} \Sigma[\bar{k}_e] \end{aligned} \quad (15)$$

Einsetzen in (14) ergibt das auf P_0 bezogene

$$\bar{k}_0^{\text{fair}} = \frac{E[\bar{k}_e] - c \cdot \Sigma[\bar{k}_e]}{1 + r_0 t}. \quad (16)$$

Der faire Preis steigt mit wachsendem Erwartungswert des Endkurses des RBZ an und fällt mit wachsender Standardabweichung des RBZ Endkurses und wachsender risikoloser Rendite.

Abhängigkeit der Renditeverteilung des RBZ von S

Bezüglich \bar{R} und den Eigenschaften des RW in den logarithmischen Variablen kann S durch Umskalierung aller vorkommenden Größen $P_0, P_e, \bar{A}, \bar{B}, \bar{K}_0, \bar{K}_e, S$, etc. mit $1/S$ als Skalenfaktor zum Verschwinden gebracht werden. Das in den RBZ Verteilungen auftauchende s ändert sich jedoch, wenn S sich ändert und hat daher Einfluss auf diese

Verteilungen: $\bar{a} = \ln\left(\frac{\bar{A}}{P_0}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{\bar{A}/S}{P_0/S}\right) = \ln\left(\frac{\bar{A}}{P_0}\right)$ ist unabhängig von S, aber $s = \frac{S}{P_0} \rightarrow \frac{S/S}{P_0/S}$

behält die Abhängigkeit von S.

Im Folgenden werden 2 Renditeverteilungen mit den in (16) berechneten \bar{k}_0^{fair} für zwei unterschiedliche s angegeben und verglichen.

³ H. Levy, M. Sarnat, "Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice" (Prentice-Hall 1984)

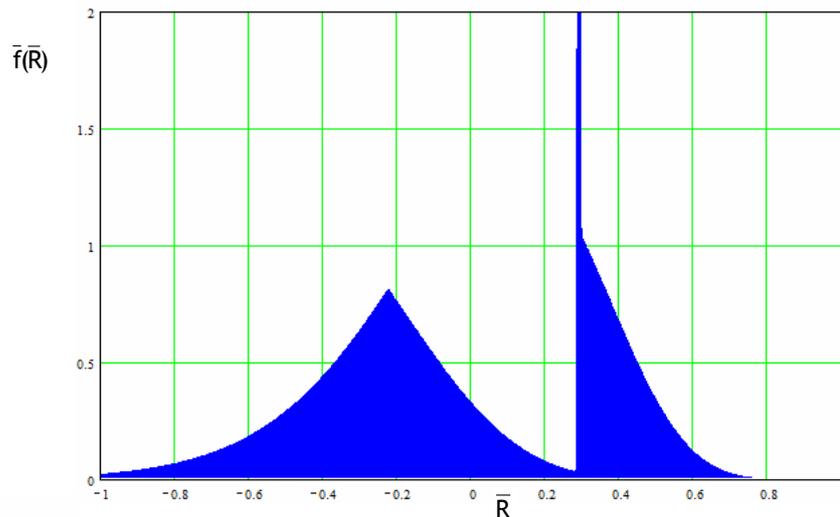


Abb.5a: RBZ Renditeverteilung für $s=0.9$ mit dem zugehörigen $\bar{k}_0^{\text{fair}} = 0.732$ berechnet. Man erhält: $E[\bar{R}] = 0.105$, $\Sigma[\bar{R}] = 0.321$, $\text{Ploss}(\bar{R} < -20\%) = 0.219$.

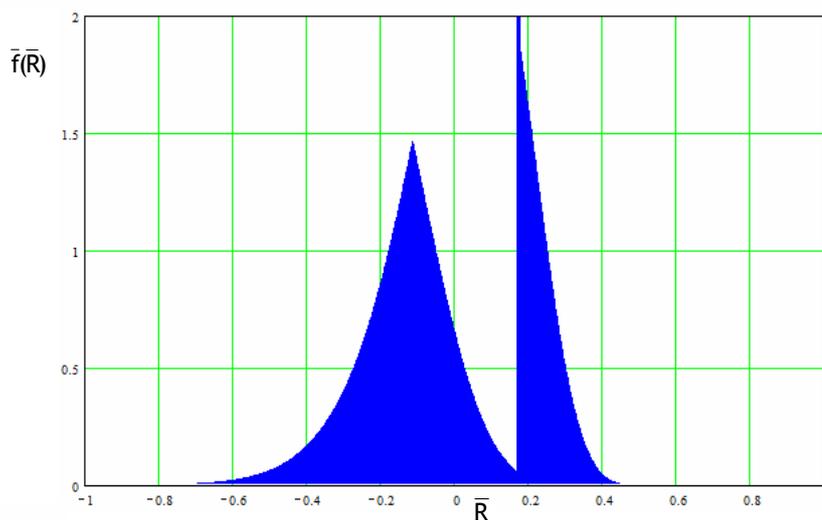


Abb.5b: RBZ Renditeverteilung für $s=1.2$ mit dem zugehörigen $\bar{k}_0^{\text{fair}} = 1.32$ berechnet. Man erhält: $E[\bar{R}] = 0.066$, $\Sigma[\bar{R}] = 0.145$, $\text{Ploss}(\bar{R} < -20\%) = 0.105$.

Ein großes $s=1.2$ (Abb.5b) entspricht einem kleinen P_0 , was eine günstige Ausgangsposition (großer Abstand zu \bar{a}) für den Erfolg des RBZ bedeutet. Deshalb liegt der faire Preis deutlich über P_0 . Dagegen führt ein s kleiner 1 zu größeren Anfangswerten P_0 von U , also einem verkleinerten Abstand zur Barriere \bar{a} . Deshalb ist der faire Preis niedriger als P_0 . Die Risiko-Rendite Beziehung ist erfüllt: eine hohe mittlere Rendite $E[\bar{R}]$ geht einher mit einem hohen Risiko $\Sigma[\bar{R}]$.

RBZ-Renditeabhängigkeit von den Eingangsparametern μ und σ

Zur Berechnung der Eigenschaften eines RBZ benötigt man die Underlying-Parameter μ_r und σ_r aus Beziehung (4). Diese sind aber nicht genau bekannt und können auch als zeitabhängig aufgefasst werden. Es ist also wichtig zu wissen, wie empfindlich die erwartete Rendite eines RBZ auf Änderungen dieser Parameter reagiert.

Variiert die Jahresrendite von U zwischen -0.2 und 0.2, dann wird dieser Bereich auch von der RBZ Rendite aufgespannt, wie in der unteren Abbildung 6 zu sehen ist. Dies bedeutet natürlich, dass eine stark positive Jahresrendite von U zu niedrigen fairen Preisen führt und umgekehrt.

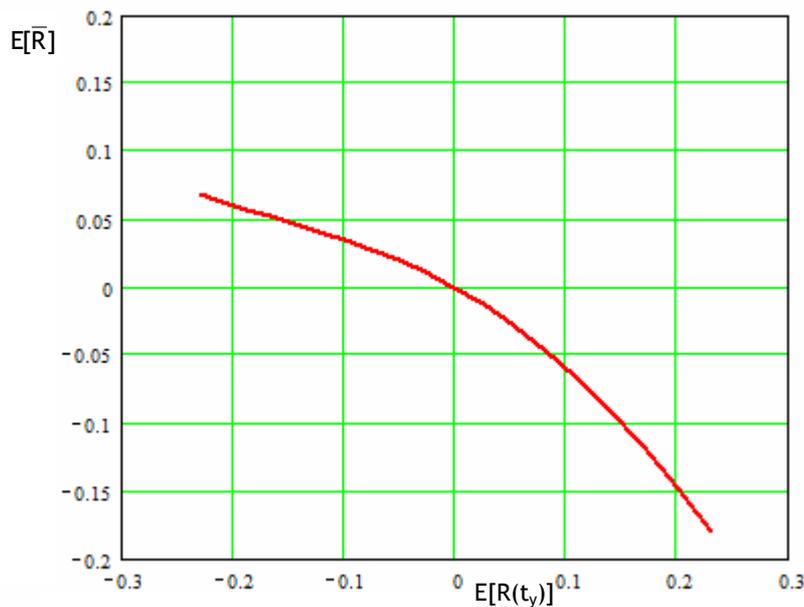


Abb.6: $E[\bar{R}]$ in Abhängigkeit der mittleren Jahresrendite von U.

Während die mittlere Rendite von U überhaupt nicht von der Volatilität abhängt, besteht eine starke Abhängigkeit der RBZ Rendite von dieser Größe: Bei zunehmender Volatilität nimmt die RBZ Rendite stark ab. Dies führt auch zu einer starken Abnahme des fairen Preises wie in Abb. 7 gezeigt.

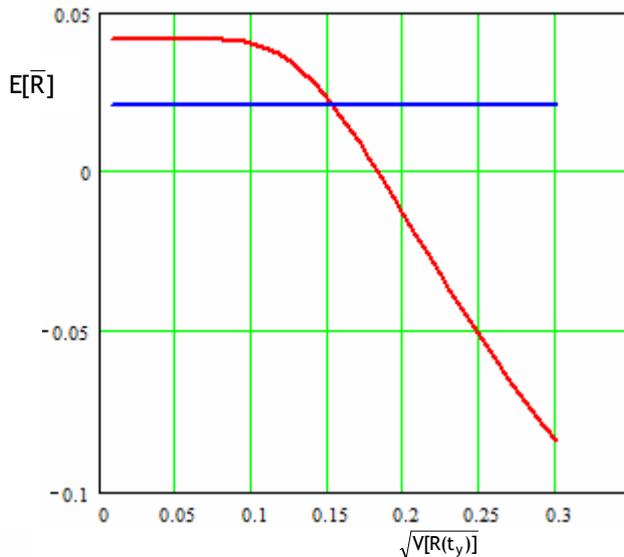


Abb.7: $E[\bar{R}]$ in Abhängigkeit von der Jahresvolatilität von U.
Die blaue Kurve ist die mittlere Jahresrendite von U, die Unabhängig von der Volatilität von U ist.

Im Übrigen besteht auch die Möglichkeit, aus den aktuellen RBZ Preisen (unter der Annahme, sie sind fair) auf die Parameterwahl der Emittenten zu schließen.

Ein Beispiel

Die theoretischen Rechnungen sollen an einem realen Beispiel veranschaulicht werden. Das Reverse-Bonuszertifikat (WKN CK3T2Y) auf den Basiswert DAX wird am 17.11.2011 „gekauft“. Bewertungstag ist am 20.9.2012. Die benötigten Parameter sind:

$t = 44$ (Wochen)

$P_0 = 5875.86$

$\bar{K}_0 = 4611.5$ (ergibt sich aus dem Marktpreis 92.23 dividiert durch das Bezugsverhältnis 0.02)

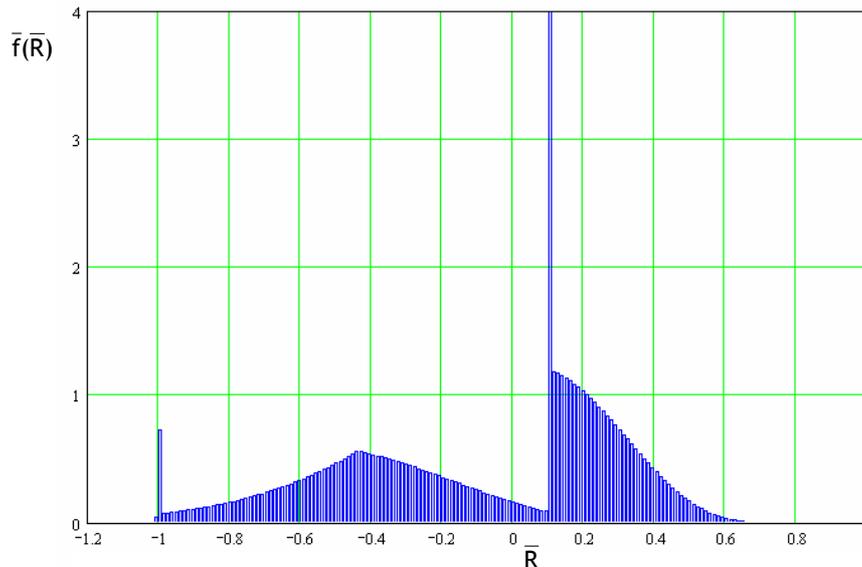
$\bar{A} = 7400$

$\bar{B} = 4900$

$S = 5000$

Für das Underlying nehmen wir eine mittlere Jahresrendite $E[R(t_y)]$ von 0% an, sowie eine Jahresvolatilität $\sqrt{V[R(t_y)]}$ von 30%. Die risikolose Rendite pro Jahr sei 2%.

Die Renditeverteilung $\bar{f}(\bar{R})$ dieses RBZ sieht dann wie folgt aus:



Dies entspricht im Spektrum der Renditeverteilungen¹ einer „Wette“. Der Reverse-Bonuspeak liegt bei $\bar{R} = 10.6\%$. Das erste Moment dieser Verteilung, die mittlere Rendite, ist -3.5% , das 2. Moment, die Volatilität des RBZ, beträgt 34.7% . Die Verlustwahrscheinlichkeit $\bar{P}_{\text{loss}} = \int_{-1}^0 \bar{f}(\bar{R})d\bar{R}$ beträgt 31.8% .

Der faire Preis ergibt sich zu 4362 (bzw. 87.25 unter Berücksichtigung des Bezugsverhältnisses). Damit liegt der Marktpreis dieses Reverse-Bonuszertifikats um 5.7% höher als der faire Preis, der sich mit den hier angenommenen Werten für die mittlere Jahresrendite und für die mittlere Jahresvolatilität des Underlyings ergibt. Die Höhe und Vorzeichen der Abweichung vom fairen Preis ist typisch für Reverse-Bonuszertifikate, die Mitte November 2011 auf dem Markt angeboten werden, im Gegensatz zu angebotenen Bonuszertifikaten, bei denen der Marktpreis deutlich weniger vom fairen Preis abweicht.

Schluss

Die statistischen Eigenschaften eines Reverse-Bonuszertifikats lassen sich durch die eines entsprechenden Bonuszertifikats ausdrücken. Wegen seiner speziellen Konstruktion mit Hilfe eines Spiegelungspunkts S gleicht ein RBZ jedoch nicht vollständig einem BZ. So ist beispielsweise die Renditeverteilung des RBZ für negative Renditen breiter als die des zugehörigen inversen BZ, d.h. die Wahrscheinlichkeit hoher Verluste ist erhöht. Ein größeres S (bei gleichzeitiger Konstanz aller anderen Parameter) hat außerdem ein risikoärmeres RBZ mit einer kleineren Rendite zur Folge. Trotz dieser Unterschiede spannt ein RBZ dennoch dasselbe Spektrum von Renditeverteilungen (bestimmt durch die Wahl von \bar{a} und \bar{b}) wie ein BZ¹ auf.

Bei allen Zertifikaten ist es wichtig, den fairen Preis des Zertifikats vor dem Kauf genauer zu berechnen. Besonders bei dem komplizierten RBZ darf man nicht a priori davon ausgehen, dass die angebotenen Kaufkurse fair sind. Untersuchungen an realen RBZ zeigen, dass RBZ in der Regel zu teuer verkauft werden.

Anhang

Wie schon gezeigt kann das RBZ auf ein entsprechendes BZ zurückgeführt werden. Um dies explizit zu zeigen wird (13) in der Form

$$\bar{f}(y_{RB}(y_U)) \left| \frac{dy_{RB}}{dy_U} \right| \cong \text{No}(y_U, \mu t, \sigma \sqrt{t}) + \int_{\bar{b}}^{\bar{a}} \left(\text{No}(y_U, \mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu\bar{a}}{\sigma^2}} \text{No}(y_U - 2\bar{a}, \mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) dy_U \cdot \delta(y_U - \bar{b}) + \quad (A1)$$

$$\left(\text{No}(y_U, \mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu\bar{a}}{\sigma^2}} \text{No}(y_U - 2\bar{a}, \mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) (\Phi(\bar{b} - y_U) - \Phi(\bar{a} - y_U))$$

geschrieben. Zum Vergleich lautet die Verteilung eines BZ¹ mit a und b:

$$f(y_B, t) = \text{No}(y_B, \mu t, \sigma \sqrt{t}) + \int_a^b f \left(\text{No}(y_U, \mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \text{No}(y_U - 2a, \mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) dy_U \cdot \delta(y_B - b) + \quad (A2)$$

$$\left(\text{No}(y_B, \mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \text{No}(y_B - 2a, \mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) \cdot (\Phi(y_B - b) - \Phi(y_B - a))$$

Wenn man folgende Ersetzungen vornimmt: $\mu \rightarrow -\mu$, $\bar{a} \rightarrow -a$, $\bar{b} \rightarrow -b$, $y_U \rightarrow -y_U$

wird das RBZ auf das BZ abgebildet. Man erhält nach den Ersetzungen für die rechte Seite von (A1)

$$\text{No}(-y_U, -\mu t, \sigma \sqrt{t}) + \int_b^a \left(\text{No}(-y_U, -\mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \text{No}(-y_U + 2\bar{a}, -\mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) d(-y_U) \cdot \delta(-y_U + b) +$$

$$\left(\text{No}(-y_U, -\mu t, \sigma \sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \text{No}(-y_U + 2a, -\mu t, \sigma \sqrt{t}) \right) \cdot (\Phi(-b + y_U) - \Phi(-a + y_U))$$

also genau (A2). Daher gilt

$$\bar{f}(y_{RB}, \bar{a}, \bar{b}, -\mu) \cong f(-\ln(2s - e^{y_{RB}}), a, b, \mu) \left| \frac{e^{y_{RB}}}{2s - e^{y_{RB}}} \right|$$

In Renditevariablen erhält man

$$\bar{f}(\bar{R}, \bar{a}, \bar{b}, \mu) \approx f(-\ln(2s - \bar{k}_0(1 + \bar{R})), -\bar{a}, -\bar{b}, -\mu) \left| \frac{\bar{k}_0}{2s - (1 + \bar{R})\bar{k}_0} \right|.$$