Theoretische Beschreibung von Bonuszertifikaten

Version 1 (28.2.2011)

Ulrich Leuthäusser

In dieser Arbeit werden die stochastischen Eigenschaften von Bonuszertifikaten untersucht. Nach der allgemeinen Herleitung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Rendite und Endpreise werden analytische Ausdrücke für diese Verteilungen angegeben unter der Annahme, dass der Basiswert einem geometrischen Random Walk folgt. Damit lassen sich alle interessanten Größen wie erwartete Rendite, Varianz, Korrelation zum Basiswert und Value at Risk berechnen. Es folgt eine ausführliche Diskussion des Verhaltens eines Bonuszertifikats und seiner gecappten Variante in Abhängigkeit der zwei frei wählbaren Parameter, dem Bonuslevel und der absorbierenden Barriere.

Folgende Bezeichnungen werden benötigt:

t	Laufzeitende des Bonuszertifikats (BZ)
$P(0) = P_0$	Preis vom Basiswert oder Underlying U zum Anfangszeitpunkt
$K(0) = K_0$	Preis von BZ zum Anfangszeitpunkt
$P(t) = P_e$	Preis von U zum Laufzeitende
$K(t) = K_e$	Preis von BZ zum Laufzeitende
A	Absorbierende Barriere
B	Bonuslevel
$R_U = P_e / P_0 - 1$	Rendite von U in der Zeit t
$R_B = K_e / K_0 - 1$	Rendite von B in der Zeit t
$r_0\ t$	risikolose Rendite im Zeitraum t
$a = \ln(A/P_0)$	Absorbierende Barriere bezogen auf P_0, logarithmiert
$b = \ln(B/P_0)$	Bonuslevel bezogen auf P_0, logarithmiert
$k_e = K_e/P_0$	Endpreis von BZ bezogen auf P_0
$y_B = \ln(k_e)$	logarithmiertes k_e
$p_e = P_e/P_0$	Endpreis von U bezogen auf P_0
$y_U = \ln(p_e)$	logarithmiertes p_e

Definition des Bonuszertifikats

Der Endpreis K_e des BZ als Funktion vom Endpreis P_e von U ist gegeben durch

$$K_e = \begin{cases} B & \text{wenn } \min(P(t')) > A \text{ für } 0 \le t' \le t \text{ und } P_e \le B \\ P_e & \text{sonst} \end{cases} \qquad (1)$$

Die folgende Abbildung stellt für die Parameter A = 2000 und B = 4000 die zwei Möglichkeiten von Bonusendkursen K_e als Funktion des Basisendpreises P_e dar. Wenn der Preis von U während der gesamten Laufzeit des BZ immer über 2000 geblieben ist, wird K_e durch die blaue Kurve beschrieben und ist immer größer gleich 4000. Berührt oder durchschreitet jedoch der Preis von U irgendwann innerhalb der Laufzeit des BZ die Barriere A, dann nimmt K_e den Preis P_e an und befindet sich damit immer auf der roten Kurve.

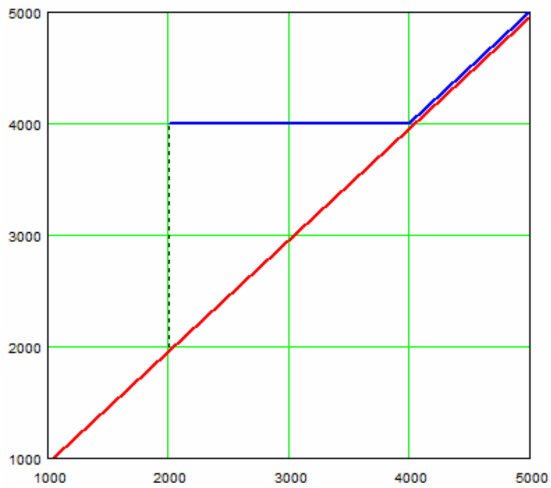


Abb.: Endkurs des Bonuszertifikats K_e als Funktion des Endpreises des Basiswerts P_e

Der Bonusendkurs K_e hängt von der gesamten Preishistorie von U ab. Mit anderen Worten, ein gegebenes P_e bestimmt nicht eindeutig den Kurs von B. Zwei unterschiedliche Pfade von U mit demselben Endwert P_e können zu unterschiedlichen Endwerten K_e führen, wenn einer der Pfade von U einmal unter A war. Beim Discountzertifikat dagegen ist K_e eine eindeutige Funktion von P_e [1].

Es wird sich herausstellen, dass logarithmische Variable zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Beschreibung besonders geeignet sind. In dieser Terminologie ergibt sich der logarithmierte Endpreis $y_B = \ln(K_e/P_0)$ des Bonuszertifikats als Funktion von $y_U = \ln(P_e/P_0)$ zu

$$y_B(t) = \begin{cases} b & \text{wenn } \min\left(y_U(t')\right) > a \text{ für } 0 \le t' \le t \text{ und } y_u(t) \le b \\ y_U(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Renditen $R_{U,B}$ von U bzw. BZ als Funktion der $y_{U,B}$ sind

$$\begin{aligned} R_U(y_U) &= e^{y_U} - 1 \\ R_B(y_B) &= \frac{P_0}{K_0} e^{y_B} - 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Die Rendite des Bonuszertifikats für $K_e = B$ lautet $R_B = B/K_0 - 1$ und wird als Bonusrendite bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(y_U,y_B,t)$

Bevor eine konkrete Verteilung für $f(y_U,y_B,t)$ gewählt wird, können noch einige allgemeine Überlegungen gemacht werden, die nicht von einer speziell gewählten Verteilung abhängen. Sei $f(y_U,y_B,t)dy_U dy_B$ die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t das Wertepaar Y_U,Y_B im Intervall zwischen y_U und $y_U + dy_U$ und zwischen y_B und $y_B + dy_B$ zu finden. Diese Verteilung ist zwar etwas komplizierter als die Verteilungen der einzelnen Variablen, aber der Aufwand lohnt sich, da mit ihrer Hilfe die Korrelation zwischen y_B und y_U berechnet werden können.

Dazu benötigt man $f_U(y_U, t \,|\, \min(y_U(t')) > a)$, die Verteilung von U unter der Bedingung, dass y_U die Barriere a während der Laufzeit $0 \le t' \le t$ nie berührt.
Die Absorptionswahrscheinlichkeit, dass a innerhalb der Zeit t berührt oder unterschritten wird, sei $\Pi_a = 1 - \text{prob}(\min(y_U(t)) > a)$. Multipliziert man $f_U(y_U, t \,|\, \min(y_U(t')) > a)$ mit $1-\Pi_a$ erhält man

$$f_U^{>}(y_U, t) = f_U(y_U \,|\, \min(y_U(t')) > a) \cdot (1 - \Pi_a) \tag{3a}$$

und analog

$$f_U^{<}(y_U, t) = f_U(y_U \,|\, \min(y_U(t')) \le a) \cdot \Pi_a \tag{3b}$$

Dann gilt

$$f(y_U, y_B, t) = f_U^{>}(y_U, t) \cdot \Phi(b - y_U) \cdot \delta(y_B - b) + \left(f_U^{>}(y_U, t)\Phi(y_U - b) + f_U^{<}(y_U, t)\right) \cdot \delta(y_B - y_U) \tag{4a}$$

---

[1] U. Leuthäusser, *Theoretische Beschreibung von Discountzertifikaten.*
http://www.sigmadewe.com/fileadmin/user_upload/pdf-Dateien/Theorie_Discountzertifikate.pdf

f besteht aus Termen, die disjunkte Ereignisse beschreiben und deren Wahrscheinlichkeiten daher addiert werden. Der erste Term ist die Wahrscheinlichkeit, dass y_u immer zwischen a und b liegt, multipliziert mit der deltafunktionsförmigen Verteilung für y_B mit genau dem Wert b. $\Phi(x)$ ist dabei die Stufenfunktion, die Eins ist bei positiven Argument x>0 und Null sonst. Der zweite Term enthält alle Ereignisse, für die $y_B = y_U$ gilt, was ebenfalls durch die Deltafunktion beschrieben wird.
Integriert man über y_B, erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung von U

$$f_U(y_U,t) = f_U(y_U,t \mid \min(y_U(t')) > a)\cdot(1-\Pi_a) + f_U(y_U,t \mid \min(y_U(t')) \le a)\cdot \Pi_a = f_U^{>}(y_U,t) + f_U^{<}(y_U,t)$$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} f_U(y_U,t)dy_U = 1$.

Wenn man $f_U^{<}(y_U,t)$ mit Hilfe der letzten Gleichung aus (4a) eliminiert, erhält man

$$f(y_U,y_B,t) = f_U^{>}(y_U,t)\cdot\Phi(b-y_U)\cdot\delta(y_B-b) + \left(f_U(y_U,t) - f_U^{>}(y_U,t)\cdot\Phi(b-y_U)\right)\cdot\delta(y_B-y_U) \qquad (4b)$$

Im Fall b < a sind die Terme mit $\Phi(b\text{-}y_U)$ in der obigen Gleichung gleich Null, weil es kein y_U gibt, das gleichzeitig $y_U < b$ und $y_U > a$ erfüllen kann, und daher sind U und BZ identisch.

Integration über y_U liefert die Verteilung von BZ

$$f_B(y_B,t) = \int_a^b f_U^{>}(y_U,t)dy_U\cdot\delta(y_B-b) + f_U(y_B,t) - f_U^{>}(y_B,t)\Phi(b-y_B) \qquad (5)$$

Integriert man über y_B um die Normierung zu überprüfen, werden der 1. und der 3.Term gleich, so dass nur das Integral über f_U übrig bleibt, das Eins ergibt.

Die Verteilungen der Renditen erhält man mit Hilfe von $f_{RB}(R_B,t)dR_B = f_B(y_B,t)dy_B$. Benutzt man Gleichung (2) um y_B zu eliminieren, dann erhält man für die Renditedichteverteilung

$$f_{RB}(R_B,t) = f_B\left(\ln\left(\frac{K_0}{P_0}(1+R_B)\right),t\right)\frac{1}{1+R_B}$$

Mit Hilfe dieser Verteilungen können alle relevanten statistischen Größen berechnet werden.

Mittlere Rendite des Bonuszertifikats

Diese ist gegeben durch

$$E[R_B] = \int_{-\infty}^{\infty} R_B(y_B)\cdot f_B(y_B,t)dy_B \qquad (6)$$

Berechnet man den Mittelwert von y_B mit (5b), erhält man

$$E[y_B] = E[y_U] + \int_a^b f_U^{>}(y_U,t)(b-y_U)dy_U$$

Da das Integral immer größer gleich Null ist, gilt $E[y_B] \ge E[y_U]$. Für kleine y_B kann man Gleichung (2) entwickeln und man bekommt

$$E[R_B] \approx E[y_B] - \left(\frac{K_0}{P_0} - 1\right) = E[y_U] + \int_a^b f_U^{>}(y_U,t)(b - y_U)dy_U - \left(\frac{K_0}{P_0} - 1\right) \approx$$
$$E[R_U] + \int_a^b f_U^{>}(y_U,t)(b - y_U)dy_U - \left(\frac{K_0}{P_0} - 1\right)$$

oder

$$E[R_B] - E[R_U] \approx \int_a^b f_U^{>}(y_U,t)(b - y_U)dy_U - \left(\frac{K_0}{P_0} - 1\right) \tag{7}$$

wobei der letzte Term das Aufgeld beim Kauf von BZ darstellt und das immer positive "Bonusintegral" reduziert. Durch das Aufgeld kann $E[R_B]$ kleiner als $E[R_U]$ werden.

Standardabweichung des BZ und die Korrelation zwischen BZ und U

Mit Hilfe des zweiten Moments $E[R_B^2] = \int_{-\infty}^{\infty} R_B(y_B)^2 \cdot f_B(y_B,t)dy_B$ erhält man für BZ die Standardabweichung $S[R_B] = \sqrt{E[R_B^2] - E[R_B]^2}$ und analog für U die Standardabweichung $S[R_U] = \sqrt{E[R_U^2] - E[R_U]^2}$. Zur Berechnung der Kovarianz

$$C[R_U R_B] = E[R_U R_B] - E[R_U] \cdot E[R_B] \tag{8}$$

benötigt man das Integral $E[R_U R_B] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_U, y_B, t) R_U(y_U) R_B(y_B) dy_U dy_B$.

Der Korrelationskoeffizient

$$\rho_{UB} = \frac{C[R_U R_B]}{S[R_U]S[R_B]} \tag{9}$$

lässt sich nun leicht bestimmen. ρ_{UB} ist ein Maß für die Abhängigkeit zwischen U und BZ und nimmt nur Werte zwischen -1 und 1 an. Wenn z.B. $\rho_{UB} \sim 1$ ist, dann verhält sich BZ quasi genauso wie U. Dann stellt sich die Frage, ob man nicht gleich U kauft. Ideal wäre ein kleines $\rho_{UB} \sim 0$, vorausgesetzt die mittlere Rendite von BZ ist größer Null, denn dann bekäme man diese unabhängig davon, wie sich U verhält.

Value at Risk

Das Value at Risk (VaR) ist ein gutes Maß zur Charakterisierung von Bonuszertifikaten. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das VaR einfach das Quantil einer bestimmten Ordnung α. Implizit kann man es wie folgt definieren

$$\int_{-\infty}^{-VaR} f_{RB}(R_B,t)dR_B = prob(R_B < -VaR) = \alpha$$

Wenn man also die schlimmsten Fälle, die mit einem Prozentsatz α << 1 vorkommen können, ausschließt, dann ist VaR der maximale Verlust.

Capped Bonuszertifikat (CBZ)

Im Folgenden wird eine Variante von BZ diskutiert, das so genannte CBZ, bei dem die Gewinne nach oben durch b begrenzt sind. Der Endpreis des CBZ ist nur dann von b verschieden, wenn die Barriere a berührt oder durchschritten wurde und außerdem y_U zur Zeit t kleiner als b ist:

$$y_B(t) = \begin{cases} y_U(t) & \text{wenn } \min(y_U(t')) \le a \text{ für } 0 \le t' \le t \text{ und } y_U(t) \le b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Es werden die entsprechenden Gleichungen für den Capped Bonus Fall angegeben:

$$\tilde{f}(y_U, y_B, t) = \left(f_U^{>}(y_U, t) + f_U^{<}(y_U, t)\Phi(y_U - b)\right) \cdot \delta(y_B - b) + f_U^{<}(y_U, t)\Phi(b - y_U) \cdot \delta(y_B - y_U) \qquad \text{(4b')}$$

Die bedingte Dichte ist

$$\tilde{f}(y_B, t \mid y_U) = \left(\Phi(y_U - b) + \frac{f_U^{>}(y_U, t)}{f_U(y_U, t)}\Phi(b - y_U)\right) \cdot \delta(y_B - b) + \left(1 - \frac{f_U^{>}(y_U, t)}{f_U(y_U, t)}\right)\Phi(b - y_U) \cdot \delta(y_B - y_U)$$

Der Term $f_U^{>}(y_U, t)\Phi(b - y_U)$ ist nur dann nicht Null, wenn a < y_U ≤ b, so dass im Fall b ≤ a sich $\tilde{f}(y_B, t \mid y_U) = \Phi(y_U - b) \cdot \delta(y_B - b) + \Phi(b - y_U) \cdot \delta(y_B - y_U)$ ergibt, was genau ein Discountzertifikat beschreibt.

Integration von (4b') über y_U liefert die Verteilung von CBZ

$$\tilde{f}_B(y_B, t) = \left(\int_a^b f_U^{>}(y_U, t) dy_U + \int_b^\infty f_u(y_u, t) dy_U\right) \cdot \delta(y_B - b) + f_u^{<}(y_B, t)\Phi(b - y_B) \qquad \text{(5')}$$

Bei der Transformation auf die Renditeverteilung ändert sich nichts:

$$\tilde{f}_{RB}(R_B, t) = \tilde{f}_B\left(\ln\left(\frac{K_0}{P_0}(1 + R_B)\right), t\right)\frac{1}{1 + R_B}$$

und zur Berechnung der Momente (6 und 8) verwendet man anstatt $f_B(y_B, t)$ die Dichte $\tilde{f}_B(y_B, t)$.

Geometrischer Random Walk des Underlyings

Nun wird eine konkrete Verteilung f_U verwendet und zwar soll U einem geometrischen Random Walk folgen (Black Scholes Modell). Da die relativen Preisänderungen dP/P bei diesem RW unabhängige Zufallsvariable sind, genügen die Logarithmen der Preise y_U einer Normalverteilung:

$$f_U(y_U,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(y_U - \mu t)^2}{2\sigma^2 t} \right) \equiv N(y_U, \mu t, \sigma\sqrt{t}) \tag{10}$$

wobei $\mu = \mu_r - \frac{1}{2}\sigma^2$ ist, mit μ_r als die mittlere Rendite und σ^2 als die Varianz der Rendite pro Zeiteinheit (siehe Anhang). Wenn U eine Dividende innerhalb der gesamten Laufzeit von BZ zahlt, dann reduziert sich μ_r um die Dividendenrendite pro Zeiteinheit.

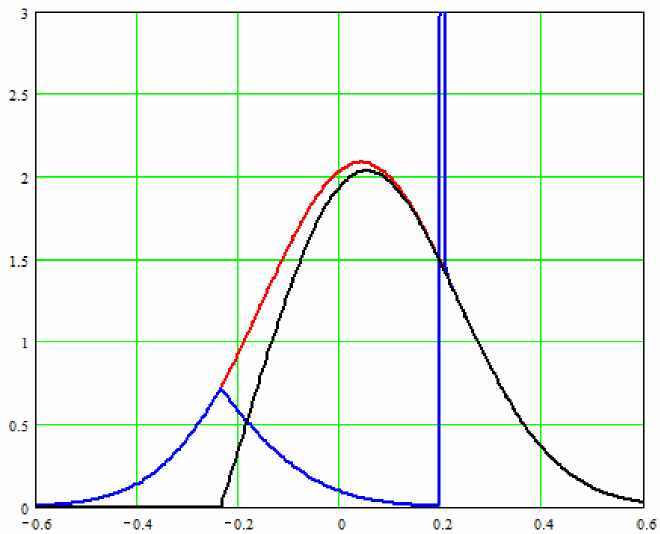
Die genaue Herleitung der Verteilung $f_U^{>}(y_U,t)$ für den Fall, dass a nie berührt wird, ist in der Literatur unter First-Passage Problemen (siehe z.B. [2]) zu finden. Man erhält $f_U^{>}(y_U,t)$ am einfachsten, wenn man die absorbierende Barriere a als Spiegel ansieht und den gleichen RW aus Gleichung(10) gespiegelt bei y_U = 2a startet. Dabei wählt man dessen Stärke so, dass bei a die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für alle Zeiten Null wird, d.h. $f_U^{>}(a,t) = 0$. Man erhält auf diese Weise

$$f_U^{>}(y_U,t) = \left(N(y_u, \mu t, \sigma\sqrt{t}) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} N(y_u - 2a, \mu t, \sigma\sqrt{t}) \right) \cdot \Phi(y_U - a) \tag{11}$$

und

$$f_U^{<}(y_U,t) = e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \cdot N(y_u - 2a, \mu t, \sigma\sqrt{t}) \Phi(y_U - a) + N(y_u, \mu t, \sigma\sqrt{t}) \Phi(a - y_U) \tag{12}$$

In der unteren Abbildung ist $f_U^{>}(y_U,t)$ als schwarze Kurve dargestellt. Durch die absorbierende Barriere a ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_U^{>}(y_U,t)$ in deren Nähe verringert. Da beim BZ die gesamte Fläche von $f_U^{>}(y_U,t)$ zwischen a und b in den Bonuspeak wandert, wird dieser durch diesen Effekt ebenfalls verringert. Die rote Kurve ist das normalverteilte U. Blau eingezeichnet sind der absorbierte Anteil $f_U^{<}(y_U,t)$ und der Bonuspeak.



[2] Cox,D.R., Miller, H.D.: *Theory of Stochastic Processes*. Methuen & Co LTD, London

Für die bedingte Dichte $f(y_B, t \mid y_U)$ erhält man den einfachen Ausdruck

$$f(y_B, t \mid y_U) = Q(y_U, a, t) \cdot \delta(y_B - b) + (1 - Q(y_U, a, t))\delta(y_B - y_U) \tag{13}$$

mit $Q(y_U, a, t) = \left(1 - \exp\left(2a \frac{y_U - a}{\sigma^2 t}\right)\right) \cdot \Phi(y_U - a)\Phi(b - y_U)$

$f(y_B, t \mid y_U)$ bringt zum Ausdruck, dass bei gegebenem y_U die Variable y_B nur zwei Werte, b oder y_U, annehmen kann. Die Stärke der Deltapeaks wird durch $Q(y_U,a,t)$ bestimmt, das für $a<<0$ schnell gegen Eins geht und erstaunlicherweise nicht von μ abhängt.

Die Absorptionswahrscheinlichkeit bei a bis zur Zeit t ist

$$\Pi_a = \int_{-\infty}^{a} f_U^{<}(y_U, t)dy_U = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{a - \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{a + \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right)e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}} \tag{14}$$

mit der Fehlerfunktion erf(x), deren Beziehung zur Normalverteilung lautet:

$$\int_{-\infty}^{x} N(y, \mu t, \sigma\sqrt{t})dy = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right).$$

Π_a hängt nur von a und den Eigenschaften des zugrundeliegenden RW ab.

Die Wahrscheinlichkeit die Bonusrendite zu erhalten, ist gegeben durch

$$P_B = \int_{a}^{b} f_U^{>}(y_U, t)dy_U =$$
$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{b - \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a - \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right) - e^{\frac{2\mu a}{\sigma^2}}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{b - 2a - \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right) + \mathrm{erf}\left(\frac{a + \mu t}{\sigma\sqrt{2t}}\right)\right)\right) \tag{15}$$

Fairer Preis

Setzt man die Sharpe Ratios von BZ und U gleich, bekommt man eine Bedingung für den fairen Kaufpreis

$$\frac{E[R_B] - r_0 t}{\Sigma[R_B]} = \frac{E[R_U] - r_0 t}{\Sigma[R_U]} = SR_U \tag{16}$$

mit r_0 als risikoloser Rendite.

Man kann die Gleichung (16) nach K_0 auflösen und erhält den fairen Preis eines BZ

$$K_0^{fair} = P_0 \frac{J_1 - SR_U\sqrt{J_2 - J_1^2}}{1 + r_0 t} \tag{17}$$

wenn man die Integrale

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y} f_B(y,t)dy \quad \text{und} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y} f_B(y,t)dy$$

benutzt. $f_B(y,t)$ ist die BZ-Verteilung und stammt aus Gleichung(5), in die die Ausdrücke (11,12) einzusetzen sind.

Reale Bonuszertifikate

Die Eingangsgrößen eines konkreten DAX - Bonuszertifikats (BC1JCF) vom 11.2.2011 lauten:

$P_0 = 73.40 \quad K_0 = 83.23 \quad B = 90.00 \quad A = 58.00$ mit einer Restlaufzeit von 54 Wochen.

Für den DAX wird eine Volatilität σ = 20% pro Jahr und eine mittlere Rendite von 6% pro Jahr angenommen.

In der unteren Abbildung sieht man mit Hilfe der Renditeverteilung, wie sich das Bonuszertifikat verhält. Während U eine lognormalverteilte, glatte glockenförmige Rendite besitzt, ist BZ bimodal, also “hop oder top“: entweder man bekommt mindestens die Bonusrendite von 8.1% mit einer Wahrscheinlichkeit $1-\Pi_a$ = 83.8% oder man verliert etwa -30% mit Wahrscheinlichkeit Π_a = 16.2%.

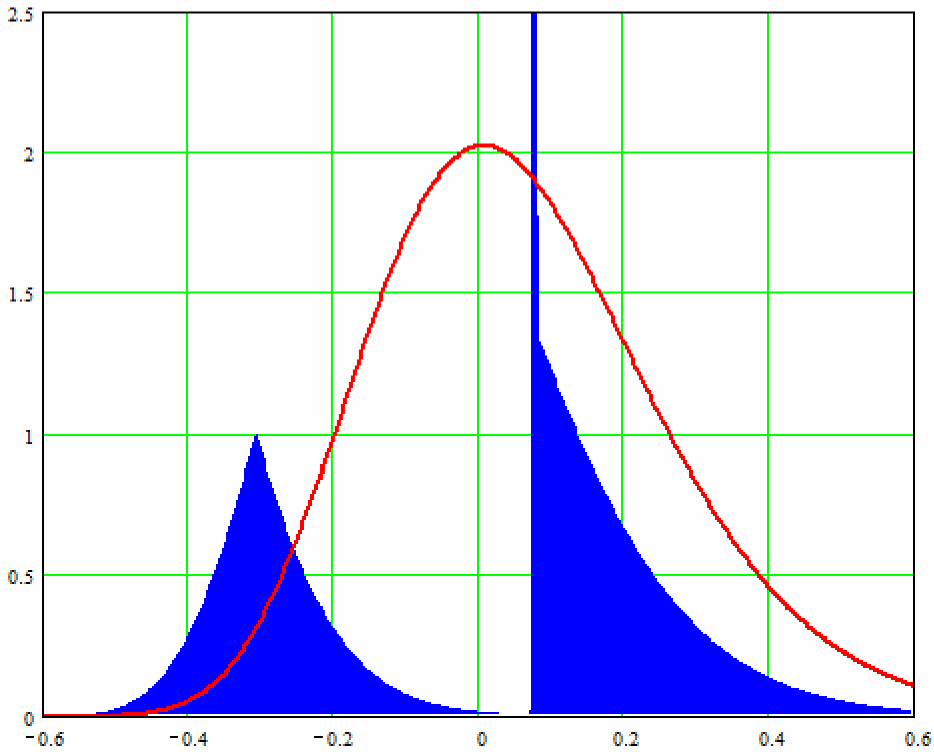


Abb.: Renditeverteilung von BZ_1 (blau) und Underlying (rot) am Laufzeitende als Funktion der Rendite

Dies entspricht einer typischen Wettsituation: der Einsatz V der Wette ist die Lage des Verlustpeaks V von ca. -30%, der Nettogewinn bei dieser Wette ist der Schwerpunkt des Gewinnpeaks G (Bonuspeak plus rechter "Schwanz") von 12%. Es gilt ungefähr die Wettgleichung:

$$(1-\Pi_a)G + \Pi_a V \sim E[R_U]$$

Die Wahrscheinlichkeit, mehr als 25% zu verlieren, beträgt bei U 4.2%, bei BZ dagegen mehr als das doppelte, nämlich 11.4%. Die ersten beiden Momente von BZ können dieses Verhalten nicht widerspiegeln und unterscheiden sich nicht besonders von denen von U. Die mittlere Rendite von BZ beträgt $E[R_B]$ = 4.6% und ist sogar etwas kleiner als die von U mit $E[R_U]$= 6.3%. Auch die Standardabweichungen sind vergleichbar: Σ_B = 16.6% ist etwas kleiner als Σ_U = 20.6%. Der Korrelationskoeffizient ist ρ_{UB} = 0.797. Das vorliegende BZ ist für die angenommenen Parameter μ, σ und r_0 = 2.0% etwas zu teuer und sollte bei 82.7 liegen.

Nimmt man ein anderes reales BZ (BN73TV) mit einem kleinerem A = 50, demselben P_0 und B und K_0 = 84.00 bei quasi derselben Laufzeit, dann erhält man folgende Verteilung (siehe untere Abbildung)

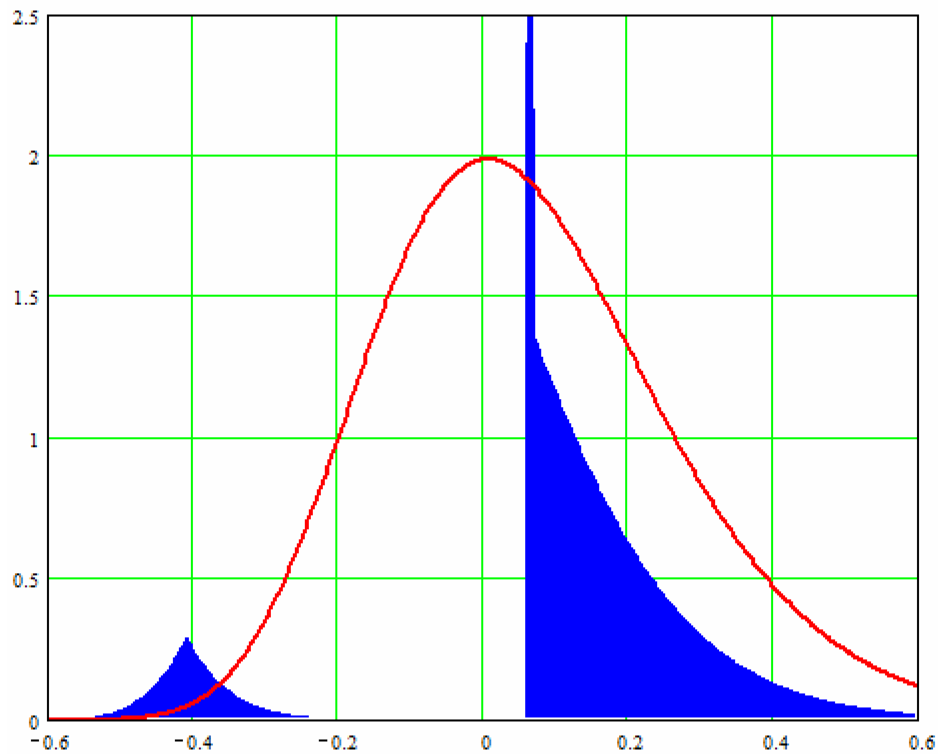
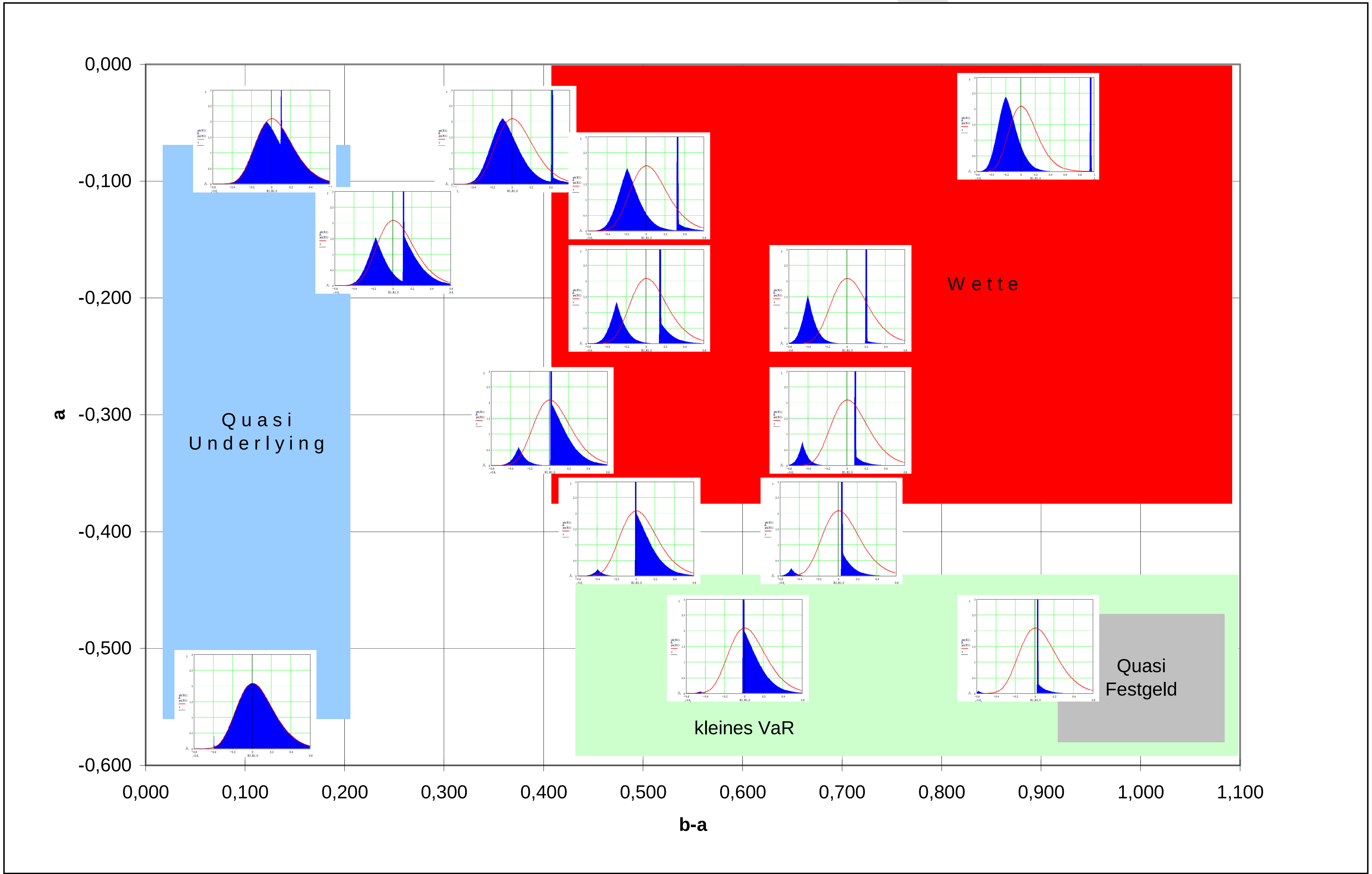


Abb.: Renditeverteilung von BZ_2 (blau) und Underlying (rot) am Laufzeitende als Funktion der Rendite

Wieder entsteht ein Split der Verteilung von U, aber die Gewinnwahrscheinlichkeit dieses BZ ist ungleich besser: die Wahrscheinlichkeit, a zu berühren beträgt nur noch Π_a = 2.9%. Die mittlere Rendite ist $E[R_B]$= 7.9%, die Standardabweichung $\Sigma[R_B]$=11.3% und ein Korrelationskoeffizient von ρ_{UB} =0.72. Der faire Preis liegt bei 87.2, also höher als der aktuell günstige Preis von 84.5.
In den folgenden Abbildungen wird das Verhalten von BZ und CBZ in Abhängigkeit von a und b grafisch dargestellt.

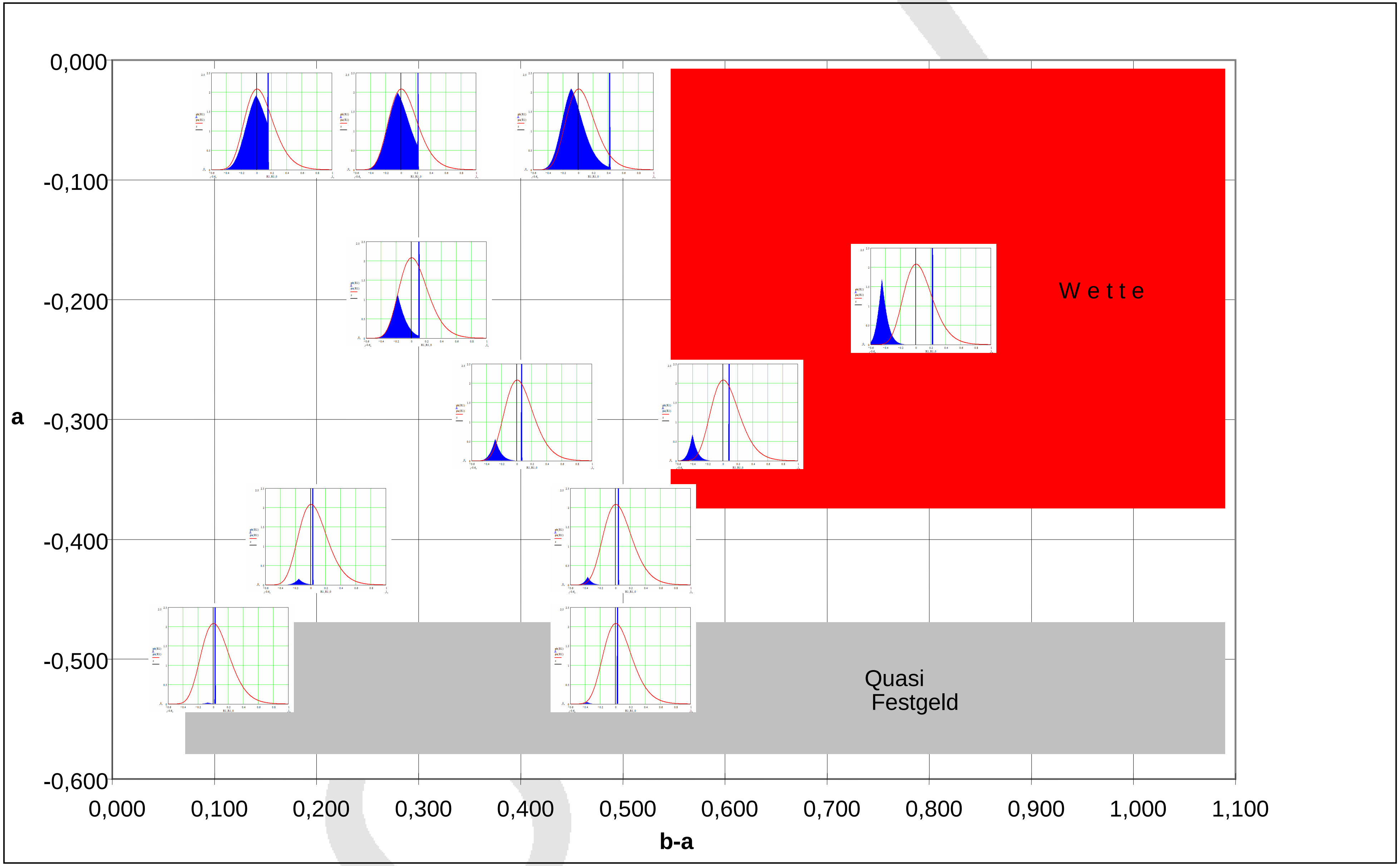
Abb.: Renditeverteilungen von BZ als Funktion von a und b-a



Die folgende Tabelle enthält die relevanten Größen für die BZ in Abhängigkeit von a und b mit folgenden Abkürzungen: $E^{\geq}[R_B] = \frac{E[R_B(y_B) \mid y_B \geq b]}{prob(y_B \geq b)}$ als Schwerpunkt des rechten Teils der Renditeverteilung ab b, $E^{<}[R_B] = \frac{E[R_B(y_B) \mid y_B < b]}{prob(y_B < b)}$ als Schwerpunkt des komplementären Teils. $p(y_B \geq b)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $y_B \geq b$, $p(y_B < b)$ analog. $R_B(b)$ ist die Bonusrendite (faire Preise vorausgesetzt) und P(Bonus) die Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten. Die VaR sind für α=1.25% berechnet. Für die Laufzeit t wurde 1 Jahr gewählt. Für die Jahresrendite von U wurde 6% angenommen, die Standardabweichung von U beträgt 20%.

a	b	b-a	ρ	Π_a	$E^{\geq}[R_B]$	P(y≥b)	$E^{<}[R_B]$	P(y<b)	$R_B(b)$	P(Bonus)	$E[R_B]$	$S[R_B]$	K_{fair}/P_0	$R_B(a)$	VaR_B	VaR_U
-0.05	0.1	0.15	0.997	0.741	0.241	0.434	-0.077	0.566	0.103	0.059	0.061	0.2	1.002	-0.051	0.315	0.314
-0.05	0.4	0.45	0.867	0.741	0.429	0.265	-0.057	0.735	0.417	0.238	0.072	0.253	1.053	-0.096	0.346	0.314
-0.05	0.85	0.9	0.692	0.741	0.954	0.259	-0.167	0.741	0.954	0.259	0.123	0.506	1.197	-0.206	0.426	0.314
-0.1	0.1	0.2	0.985	0.523	0.202	0.542	-0.108	0.458	0.092	0.166	0.06	0.197	1.012	-0.106	0.321	0.314
-0.1	0.3	0.4	0.858	0.523	0.276	0.482	-0.13	0.518	0.256	0.399	0.066	0.227	1.074	-0.158	0.362	0.314
-0.1	0.5	0.6	0.755	0.523	0.399	0.476	-0.203	0.523	0.397	0.47	0.084	0.314	1.180	-0.233	0.417	0.314
-0.2	0.1	0.3	0.935	0.223	0.129	0.781	-0.203	0.218	0.056	0.406	0.056	0.178	1.047	-0.218	0.345	0.314
-0.2	0.2	0.4	0.83	0.223	0.14	0.778	-0.238	0.222	0.108	0.581	0.056	0.178	1.102	-0.257	0.378	0.314
-0.2	0.4	0.6	0.655	0.223	0.18	0.777	-0.337	0.223	0.177	0.75	0.065	0.22	1.268	-0.354	0.461	0.314
-0.3	0.1	0.4	0.88	0.075	0.079	0.924	-0.305	0.075	0.019	0.549	0.05	0.147	1.085	-0.317	0.368	0.314
-0.3	0.3	0.6	0.582	0.075	0.084	0.924	-0.401	0.075	0.075	0.842	0.047	0.134	1.256	-0.41	0.453	0.314
-0.3	0.6	0.9	0.446	0.075	0.104	0.924	-0.543	0.075	0.104	0.923	0.055	0.171	1.651	-0.551	0.586	0.314
-0.4	-0.2	0.2	0.997	0.02	0.067	0.98	-0.326	0.019	-0.185	0.08	0.06	0.194	1.004	-0.332	0.312	0.314
-0.4	0.1	0.5	0.854	0.02	0.053	0.98	-0.381	0.02	-0.0019	0.604	0.045	0.121	1.107	-0.395	0.374	0.314
-0.4	0.2	0.6	0.694	0.02	0.049	0.98	-0.433	0.02	0.025	0.783	0.039	0.095	1.191	-0.437	0.422	0.314
-0.4	0.4	0.8	0.355	0.02	0.048	0.98	-0.523	0.02	0.046	0.953	0.037	0.083	1.426	-0.53	0.519	0.314
-0.5	-0.4	0.1	1	0.0041	0.062	0.996	-0.398	0.0037	-0.329	0.0055	0.061	0.2	0.999	-0.393	0.329	0.314
-0.5	0	0.5	0.934	0.0041	0.051	0.996	-0.42	0.0041	-0.054	0.41	0.049	0.144	1.057	-0.426	0.054	0.314
-0.5	0.1	0.6	0.849	0.0041	0.044	0.996	-0.445	0.004	-0.01	0.62	0.042	0.107	1.116	-0.457	0.01	0.314

Abb.: Renditeverteilungen von CBZ als Funktion von a und b-a



Die folgende Tabelle enthält die relevanten Größen der CBZ in Abhängigkeit von a und b.
Gleiche Abkürzungen und Parameter wie in der Tabelle für die BZ.

a	b	b-a	ρ	Π_a	P(y≤b)	R_B(b)	P(Bonus)	E[R_B]	S[R_B]	K_{fair}/P_0	R_B(a)	VaR_B	VaR_U
-0.05	0.1	0.15	0.845	0.741	0.566	0.152	0.434	0.046	0.126	0.959	0.0084	0.284	0.314
-0.05	0.2	0.25	0.882	0.741	0.667	0.229	0.333	0.053	0.164	0.994	-0.043	0.31	0.314
-0.05	0.4	0.45	0.847	0.741	0.735	0.42	0.265	0.071	0.248	1.051	-0.095	0.348	0.314
-0.1	0.1	0.2	0.796	0.523	0.458	0.142	0.542	0.046	0.128	0.968	-0.065	0.292	0.314
-0.1	0.3	0.4	0.795	0.523	0.518	0.265	0.482	0.064	0.215	1.067	-0.152	0.357	0.314
-0.2	0.1	0.3	0.637	0.223	0.218	0.104	0.782	0.045	0.12	1.001	-0.182	0.314	0.314
-0.2	0.2	0.4	0.635	0.223	0.222	0.13	0.778	0.051	0.154	1.081	-0.243	0.365	0.314
-0.2	0.4	0.6	0.625	0.223	0.223	0.179	0.777	0.064	0.218	1.265	-0.353	0.458	0.314
-0.2	0.6	0.8	0.615	0.223	0.223	0.223	0.777	0.076	0.276	1.49	-0.45	0.54	0.314
-0.3	0.1	0.4	0.451	0.075	0.075	0.064	0.925	0.039	0.092	1.039	-0.287	0.338	0.314
-0.3	0.3	0.6	0.449	0.075	0.075	0.082	0.925	0.046	0.127	1.248	-0.406	0.451	0.314
-0.4	0.1	0.5	0.275	0.02	0.02	0.04	0.98	0.032	0.057	1.063	-0.369	0.348	0.314
-0.4	0.2	0.6	0.275	0.02	0.02	0.043	0.98	0.033	0.065	1.172	-0.428	0.408	0.314
-0.4	-0.2	0.2	0.264	0.02	0.019	0.03	0.981	0.026	0.03	0.795	-0.157	0.126	0.314
-0.5	0	0.5	0.138	0.0041	0.0041	0.027	0.996	0.025	0.024	0.974	-0.377	-0.027	0.314
-0.5	-0.4	0.1	0.118	0.0041	0.0037	0.025	0.996	0.025	0.024	0.654	-0.072	-0.025	0.314

Fazit

Bonuszertifikate sind sowohl aus mathematischer Sicht aufgrund der eingebauten Pfadabhängigkeit und dem damit verbundenen stochastischen Verhalten interessant, als auch aus Anwendersicht, da Bonuszertifikate sehr unterschiedliche Investitionsstrategien ermöglichen. Das Spektrum reicht bei spezieller Wahl von zwei frei wählbaren Parametern a und b vom Grenzfall BZ = U bis zu BZ ≈ Festgeld bzw. bei den Capped Bonuszertifikaten von CBZ = Discountzertifikat bis zu CBZ ≈ Festgeld.

Am wichtigsten ist jedoch der Bereich, in dem die Verteilung der Bonusendpreise K_e zwei ausgeprägte Gipfel hat, und man durch geeignete Wahl von a und b praktisch jede Wettsituation erzeugen kann. Es ist z.B. möglich, mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% einen Gewinn von ca. 10% zu bekommen, hat aber die kleine Wahrscheinlichkeit von 7% eines sehr großen Verlustes von -40%. Wetten mit einer kleineren Quote sind auch möglich. So steht bei gleicher Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit von ½ ein Gewinn von 27% einem Verlust von -13% gegenüber.

Man sollte sich im Klaren sein, dass man bei wiederholten Wetten nicht mehr gewinnen kann als den Erwartungswert von R_U. Wenn man allerdings glaubt, dass Märkte zeitabhängige $E[R_U]$ (Bull- und Bearmärkte) haben, dann kann man dies in der Auswahl des BZ berücksichtigen und in Zeiten von Seitwärtsmärkten oder leicht fallender Kurse andere BZ kaufen als in Bullmärkten.

Es ist immer sicherzustellen, dass die realen BZ-Kaufpreise faire Preise sind. Bei den durchgeführten Untersuchungen stellte sich heraus, dass dies nicht immer der Fall ist.

Anhang

Sei $y(t) = \ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right) = \ln(1 + R(t))$ normalverteilt: $y(t) \sim N(y, \mu^* t, \sigma^* \sqrt{t})$

x(t)=1+R(t) ist dagegen lognormalverteilt: $x(t) \sim Ln(x, \mu^* t, \sigma^* \sqrt{t})$

Der Erwartungswert von x und die Varianz von x sind gegeben durch

$$E[x(t)] = 1 + E[R(t)] = \exp\left(\mu^* t + \frac{1}{2}\sigma^{*2} t\right)$$
$$V[x(t)] = V[R(t)] = \exp\left(\sigma^{*2} t\right)\left(\exp\left(\sigma^{*2} t\right) - 1\right)\exp\left(2\mu^* t\right)$$

Im Limes $t \to 0$ sind die infinitesimalen Renditen

$$\lim_{t\to 0}\frac{E[R(t)]}{t} = \mu_r = \mu^* + \frac{1}{2}\sigma^{*2} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{V[R(t)]}{t} = \sigma_r = \sigma^*$$

In den Variablen μ_r, σ_r erhält man dann

$$E[x(t)] = 1 + E[R(t)] = \exp(\mu_r t)$$
$$V[x(t)] = V[R(t)] = \exp\left(\sigma_r^2 t\right)\left(\exp\left(\sigma_r^2 t\right) - 1\right)\exp\left(2\left(\mu_r - \frac{1}{2}\sigma_r^2\right)t\right) = \left(\exp\left(\sigma_r^2 t\right) - 1\right)\exp(2\mu_r t)$$

Oft sind die Jahresrenditen E[R(ty)] oder die Varianz V[R(ty)] pro Jahr gegeben und man möchte μ^*, σ^* und μ_r dadurch ausdrücken. Man erhält

$$\mu_r = \frac{1}{t_y}\ln(1 + E[R(t_y)]) \qquad \sigma_r^2 = \frac{1}{t_y}\ln\left(1 + \frac{V[R(t_y)]}{(1 + E[R(t_y)])^2}\right)$$

Die richtigen Parameter für den Random Walk in den logarithmischen Variablen y lauten daher

$$\mu^* = \frac{1}{t_y}\ln(1 + E[R(t_y)]) - \frac{1}{2}\frac{1}{t_y}\ln\left(1 + \frac{V[R(t_y)]}{(1 + E[R(t_y)])^2}\right) \qquad \sigma^{*2} = \frac{1}{t_y}\ln\left(1 + \frac{V[R(t_y)]}{(1 + E[R(t_y)])^2}\right)$$

Will man E[R(t)] durch E[R(ty)] und V[R(t)] durch V[R(ty)] ausdrücken, erhält man

$$E[R(t)] = (1 + E[R(t_y)])^{\frac{t}{t_y}} - 1 \qquad V[R(t)] = \left[\left[1 + \frac{V[R(t_y)]}{(1 + E[R(t_y)])^2}\right]^{\frac{t}{t_y}} - 1\right](1 + E[R(t_y)])^{\frac{2t}{t_y}}$$

Für kleine E[R(t)]<<1 und V[R(t)]<<1 ergeben sich die bekannten Umskalungsformeln

$$E[R(t)] = \frac{t}{t_y}E[R(t_y)] \qquad V[R(t)] = \frac{t}{t_y}V[R(t_y)] \;.$$