

Die allgegenwärtige Fangstoßformel für ein Kletterseil

Version 1 (September 2015)

Ulrich Leuthäusser

Diese Arbeit demonstriert die vielseitige Anwendbarkeit der bekannten Fangstoßformel. Obwohl ursprünglich nur für den geraden Sturz mit einem linear elastischen Seil hergeleitet, gilt sie fast unverändert auch für viele andere, komplexere Sturzmodelle und -situationen.



Typischer gerader Sturz im Klettergarten mit niedrigem Sturfaktor[9].

Im Folgenden soll einerseits die bekannte Fangstoßformel so einfach wie möglich hergeleitet werden, als auch ihre Bedeutung für komplexere Sturzmodelle und Sturzsituationen gezeigt werden. So erscheint sie in derselben Form auch beim Sturz mit innerer sowie äußerer Reibung, beim Schlappseil oder beim schrägen Sturz. Auch beim Modellieren einer Seilbremse taucht sie in ihrer ursprünglichen Form auf.

Die vorliegende Arbeit richtet sich an den interessierten Laien, der gewisse Vorkenntnisse in Physik mitbringt, wie den Energiesatz und vielleicht auch ein rudimentäres Verständnis für die Newton'schen Bewegungsgleichungen. Da Wissenslücken heutzutage sofort durch das Internet aufzufüllen sind, ist ein gewisser Anspruch an den Leser gerechtfertigt. Die mathematischen Voraussetzungen sind eher gering, die Möglichkeit mit den einfachen Ergebnissen und Formeln eigene Rechnungen und Abschätzungen durchzuführen, dagegen groß.

Viele interessante und wichtige Fragen aus der Praxis werden mit einfachen Methoden im Laufe der Arbeit beantwortet. Wie groß sind die Kräfte auf den Kletterer bei einer bestimmten Fallhöhe? Ist Schlappseil von Vor- oder Nachteil? Wie wirkt die Reibung zwischen Seil und Karabiner auf den Kletterer, die Sicherungspunkte und den Sichernden? Sind beim Klettern Sturzfaktoren größer zwei möglich? Wie wird eine Seilbremse beschrieben? Was passiert beim Sturz im Quergang?

Die Fangstossformel geht auf Arnold Wexler zurück, der diese 1950 als erster aufs Sichern beim Bergsteigen angewendet hat [1]. Aus neuerer Zeit gibt es einige, ebenfalls einfach gehaltene Arbeiten im Internet zur Sturzphysik. Lesenswert sind [2,3,4,8], andere wie [5,6] sind mit Vorsicht zu lesen, da sich einige Fehler eingeschlichen haben.

Herleitung und Diskussion der Fangstoßformel

Zur Herleitung der bekannten Fangstoßformel benötigt man zunächst eine Materialgleichung, die die Beziehung zwischen der Seilspannung und der Seildehnung herstellt. Bei nicht zu großen Dehnungen ist diese linear. In der Nomenklatur der Elastizitätstheorie lautet dann diese Beziehung (das Hooke'sche Gesetz)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

mit der Spannung $\sigma = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Seilquerschnitt } A}$, der Dehnung $\varepsilon = \frac{\text{Längenänderung } y}{\text{Seillänge } L}$ und dem Elastizitätsmodul E als Materialkonstante. Je größer E , desto mehr Spannung ist nötig, eine bestimmte Dehnung zu erreichen. Die Einheit von E ist dieselbe wie die Spannung, also $\text{N/m}^2 = 1\text{Pa}$. Für die Kraft $F = \sigma A$ erhält man:

$$F = \left(\frac{EA}{L} \right) y = ky. \quad (2)$$

Der Term EA/L ist die Federkonstante k und ist von L abhängig. Das ist wichtig für das Folgende und auch leicht zu verstehen: ein langes Seil lässt sich leichter um dasselbe y dehnen als ein kurzes.

Nun benötigt man nur noch den Energiesatz, um zunächst die Anfangsgeschwindigkeit (Beginn der Seilwirkung) durch die Fallhöhe h auszudrücken, also $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$

was nach v_0 aufgelöst $v_0 = \sqrt{2gh}$ ergibt.

Am Umkehrpunkt des Seils mit der maximalen Dehnung $y_{\max}$, der maximalen Rückstellkraft $F_{\max}$ und Geschwindigkeit Null lautet der Energiesatz (zunächst ohne slack (Schlappseil), d.h. $s = 0$)

$$mgh = -mgy_{\max} + \int_0^{y_{\max}} F(y)dy \quad (3)$$

Der von der Schwerkraft kommende Teil der potentiellen Energie wird durch die Dehnung verringert (das Koordinatensystem ist so gewählt, dass y dabei anwächst, siehe Abb.1). Der andere Teil, die Dehnungsenergie, wäre im Fall einer konstanten Kraft einfach $F \cdot y$, also Kraft-Weg. Für unsere dehnungsabhängige Kraft muss man jedoch über die Teilstücke

$F(y)dy$ addieren, d.h. das Integral $\int_0^y F(y)dy$ berechnen, was bei der linearen y -Abhängigkeit einfach zu machen ist.

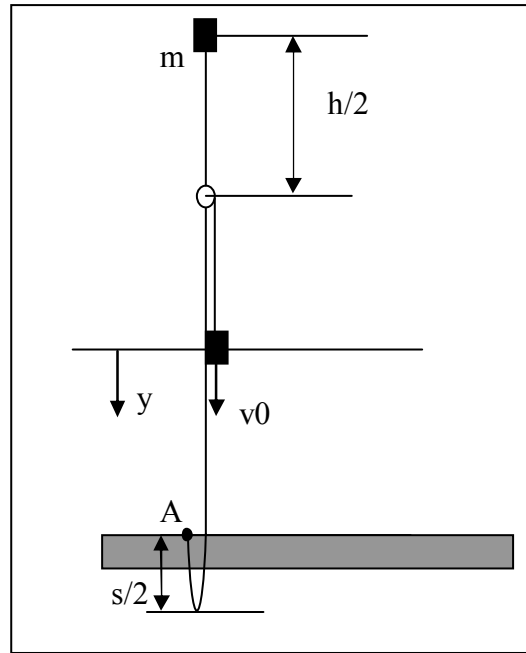


Abb. 1: Ein gerader Sturz bei dem die Masse m um die Strecke h fällt und bei $y=0$ die Geschwindigkeit v_0 hat. Dort beginnt sich das Seil (Länge L), das in A festgemacht ist, zu dehnen wenn $s = 0$. s beschreibt ein mögliches Durchhängen des Seils (slack).

Das Ergebnis lautet

$$mgh = -mgy_{\max} + \frac{EA}{L} \frac{y_{\max}^2}{2} \quad (4)$$

oder mit $y_{\max} = \left(\frac{L}{EA}\right) \cdot F_{\max}$ die Gleichung $mgEA \frac{h}{L} = -mgF_{\max} + \frac{1}{2} F_{\max}^2$.

Bezeichnet man das Verhältnis Fallhöhe zu ausgegebener Seillänge als Sturfaktor

$$f = h/L \quad (5)$$

dann erhält man nach $F_{\max}$ aufgelöst

$$F_{\max} = mg + \sqrt{2mgEaf + m^2 g^2} \quad (6)$$

$F_{\max}$ wird unglücklicherweise als Fangstoß bezeichnet. Physikalisch ist $F_{\max}$ kein Stoß, (bestenfalls also Fangkraft), sondern (nach Division durch die Querschnittsfläche A) die maximale Spannung im Seil, verantwortlich für einen potentiellen Seilriss.

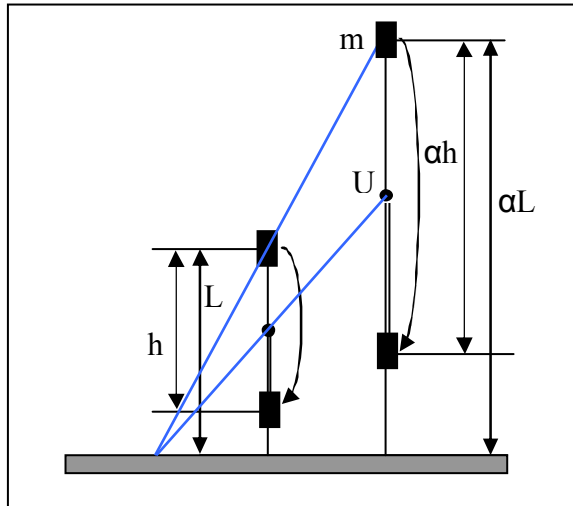


Abb.2: Skaleninvarianz des Fangstosses: alle Stürze bei denen sich die Masse m und die Umlenkung U an beliebigen, übereinanderliegenden Punkten auf den blauen Linien befinden, haben den gleichen Sturzfaktor und damit den gleichen Fangstoss.

In $F_{\max}$ geht die Fallhöhe h nur als Verhältnis h/L ein, hängt also nur von f ab. Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Es stellt ein Skalengesetz (siehe Abb.2) dar, da bei gleichzeitiger Umskalierung der Fallhöhe h und der ausgegebenen Seillänge L um den gleichen Faktor $F_{\max}$ konstant bleibt. Es ist schon verblüffend, dass ein Sturz mit einer kleinen Fallhöhe und $f=2$ in den Stand einer Mehrseillängenroute die gleichen hohen Kräfte hervorruft wie ein Sturz mit größerem h .

Während beim Klettern die Fallhöhe h maximal $2L$ werden kann und daher $0 \leq f \leq 2$ gilt, ist dies beim Klettersteiggehen anders. Da ist L ($\approx 1\text{m}$) die Länge der Sicherungsschlinge, die den Klettersteiggeher mit der Versicherung des Klettersteigs verbindet. Die Fallhöhe kann mehrere Meter betragen, je nachdem wie weit die Befestigungspunkte des Klettersteigs auseinander liegen, so dass auf diese Weise Sturzfaktoren größer 2 auftreten können.

Wenn $2mgEaf \gg m^2g^2$ gilt (also große Stürze, wie z.B. der Normsturz), dann kann man eine einfachere Gleichung für $F_{\max}$ und $y_{\max}$ benutzen, nämlich

$$F_{\max} \approx m\omega v_0 = \sqrt{2mgEaf} \quad \text{und} \quad \frac{y_{\max}}{L} = \frac{F_{\max}}{EA} \approx \sqrt{\frac{2mgf}{EA}}.$$

Was passiert, wenn E halbiert wird (wenn man z.B. die Zwillingseile immer nur einfach einhängt)? $F_{\max}$ wird dann etwa um den Faktor $1/2\sqrt{2} \approx 0.71$ kleiner und man kann deshalb nur Fangstoßreduktionen von maximal 30% erwarten. Die Dehnung $y_{\max}$ wird dagegen um $\sqrt{2}$ größer, das Produkt bleibt unverändert.

Nun wollen wir mit den abgeleiteten Formeln den Elastizitätsmodul eines Kletterseils abschätzen. Löst man Gleichung (6) nach EA auf, erhält man $EA = 1/f \left(F_{\max}/2mg - 1 \right) \cdot F_{\max}$. Nimmt man für $F_{\max} = 8\text{kN}$ als typischen Wert für den Normfangstoß an, dann ergibt sich $EA = 18.5\text{kN}$. Unser Oszillatormodell ist jedoch nicht ganz korrekt, denn die beim Normsturz gemessenen dynamischen relativen Dehnungen $y_{\max}/L$ von etwa 35% sind niedriger als die aus der Gleichung (2) $y_{\max}/L = F_{\max}/EA$ berechneten mit etwa 43%. Angesichts des einfachen Modells mit seinen vereinfachten Annahmen ist das Ergebnis jedoch nicht schlecht und daher für Abschätzungen geeignet.

Mit einem Kletterseilradius von 5mm erhält man für $E = 0.24\text{GPa}$. Ein Stahlseil mit gleichem Durchmesser hat mehr als das 10-fache, ein Hanfseil hat ein $E \approx 0.6\text{GPa}$, ein Gummiseil liegt zwischen 0.001 und 0.01 GPa.

Das größtmögliche $F_{\max}$ (bei $m = 80\text{kg}$) liegt mit dem maximal möglichen Sturzfaktor $f=2$ mit 6% nur wenig über dem Normsturzfangstoss. Mit einer typischen Reißfestigkeit von ungefähr 20kN, d.h. mehr als doppelt soviel, kann ein Kletterseil bei einem normalen Sturz durch reine Dehnung (ohne Schnitt mit einer scharfen Kante), nicht reißen. Bei Hanfseilen ist dies anders. Die Reißfestigkeit eines Hanfseils beträgt etwa 8kN, so dass bei einem Normfangstoß von ca. 14kN (unter Benutzung von $E = 0.6\text{GPa}$) ein Hanfseil längst reißt.

Obwohl die Bewegungsgleichung für den beschriebenen Sturz nicht zur Ableitung von $F_{\max}$ benötigt wurde, wird diese hier angegeben, da später Bewegungsgleichungen noch benutzt werden. Die Summe aller Kräfte ist gleich Masse mal Beschleunigung, so dass gilt

$$m\ddot{y} = -ky + mg. \quad (7)$$

Das ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit einer äußeren konstanten Kraft und hat mit den Anfangsbedingungen $y(0)=0$ und $v(0)=v_0$ die Lösung

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$. Man erhält also nicht nur $F_{\max}$ oder $y_{\max}$, sondern auch den zeitlichen Verlauf von Dehnung, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Lässt man die Fallhöhe h in der Fangstossformel (6) gegen Null gehen, erhält man nicht, wie man vielleicht annehmen könnte, den statischen Grenzfall $F_{\max}^{\text{stat}} = mg$, sondern das doppelte $F_{\max} = 2mg$. Der Grund für den Faktor 2 ist die Trägheitskraft mg am Umkehrpunkt des schwingenden Seils (7). Im statischen Fall ist die relative Seildehnung gegeben durch

$$\frac{y_{\max}^{\text{stat}}}{L} = \frac{mg}{EA}$$

Bei einer durchschnittlichen statischen Seildehnung von ca. 8% (gemittelt über viele Kletterseile), erhält man mit $m = 80\text{kg}$ ein $EA = 9.81\text{kN}$, viel kleiner als der oben ermittelte Wert für EA . Man kann also das Seil nicht vollständig mit nur einem Elastizitätsmodul beschreiben, da es sich für längere Zeiten (= statischer Fall) viel weicher verhält als für kurze Zeiten. Ein genaueres Modell mit zwei Elastizitätsmodulen, das das Langzeitverhalten richtig beschreibt, ist das sog. Standard Linear Solid Modell [7].

Wir diskutieren noch die auftretenden Kräfte. Für einen außen stehenden Beobachter ist zu Beginn der Seilwirkung die Seilspannung Null, die Kraft auf den Kletterer jedoch mg . Die maximale Seilspannung ist $F_{\max}/A$, die maximale Kraft auf den Kletterer $F_{\max} - mg$.

Betrachtet man die Kräfte aus Sicht des Kletterers (also in seinem beschleunigten Bezugssystem), dann ist er während seines freien Falls kräftefrei. Setzt die Bremswirkung des Seils ein, wird diese Bremskraft zur Gewichtskraft hinzugefügt. Zum Zeitpunkt des maximalen Fangstosses beträgt das effektive Gewicht des Kletterers $F_{\max}$. Das sind unter Normsturzbbedingungen 8kN, d.h. etwa 10g. Die Zeitdauer dieser enormen Kraft beträgt jedoch nur etwa eine Zehntel Sekunde.

Fangstoß mit slack (Schlappseil)

Ist $s > 0$ (siehe Abb.1), sei es durch einen unachtsamen Sichernden oder durch herausgezogenes Seil fürs Karabinerklippen durch den Kletterer selbst, dann erhöhen sich sowohl die Fallhöhe h als auch die Seillänge L um s . In Gleichung (4) wird h also durch $h + s$ und L durch $L + s$ ersetzt:

$$F_{\max} = mg + \sqrt{2mgEA \frac{h+s}{L+s} + m^2 g^2} . \quad (6')$$

Das ist soweit trivial, aber das Ergebnis ist interessant. Dazu formen wir $\frac{h+s}{L+s}$ um in

$\frac{h+s}{L+s} = f = f_0 + (1-f_0) \frac{s}{L+s}$, wobei $f(s=0) = f_0 = h/L$. Für $f_0 > 1$ ist der zweite Term der obigen Gleichung negativ und verkleinert den Sturzfaktor f gegenüber dem ohne slack. Bei Mehrseillängenrouten können Sturzfaktoren größer eins vorkommen. Zumindest theoretisch ist slack dort vorteilhaft, wo man weit über den Stand oder ersten Haken klettern muss und man beim Sturz unterhalb des Sichernden landet. Aber auch nur dann, wenn sichergestellt ist, dass die größere Sturzhöhe nicht zu einem größeren Aufprall auf dem Fels bzw. auf einem Band oder gar zu einem Zusammenstoß mit dem Sichernden führt. Für $f_0 < 1$ hingegen wird der Sturzfaktor vergrößert. Da dies der Normalfall ist (im Klettergarten immer, wenn man von großer äußerer Reibung absieht (siehe nächster Abschnitt)), führt slack zu härteren Stürzen und ist daher zu vermeiden.

Beim top-rope-Klettern ist die Fallhöhe Null. Die maximale Kraft aufs Seil bekommt man also, indem man in (6') $h = 0$ setzt. Setzt man auch noch $s = 0$, dann erhält man für $F_{\max}$ den kleinstmöglichen Wert von $2mg$. Der Sichernde muss also das doppelte Körpergewicht beim Fall ins top-rope ohne slack halten. Die Kraft auf die Umlenkung ist demnach das Vierfache. Überrascht?

Fangstoß mit äußerer (trockener) Reibung

Um die äußere Reibung zu berücksichtigen (ausführlicher behandelt in [7]), müssen wir die Bewegungsgleichung für die Sturzmasse m verwenden. Wir stellen diese zunächst ohne Reibung unter Berücksichtigung des Umlenkpunkts U auf. An diesem herrscht Gleichgewicht der Federkräfte, nämlich

$$k_2(y_2 - y_1) = k_1 y_1$$

(siehe Abb.3). $k_1 = k \frac{L}{L-h/2}$ und $k_2 = k \frac{L}{h/2}$ erfüllen die Beziehung $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ hintereinander- geschalteter Federkonstanten.

Für die Federkraft ky_2 gilt demnach auch

$$ky_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y_2 = k_1 y_1 = k_2 (y_2 - y_1),$$

so dass die folgende Gleichung äquivalent zu (7) ist:

$$m\ddot{y}_2 + k_2(y_2 - y_1) = mg . \quad (8)$$

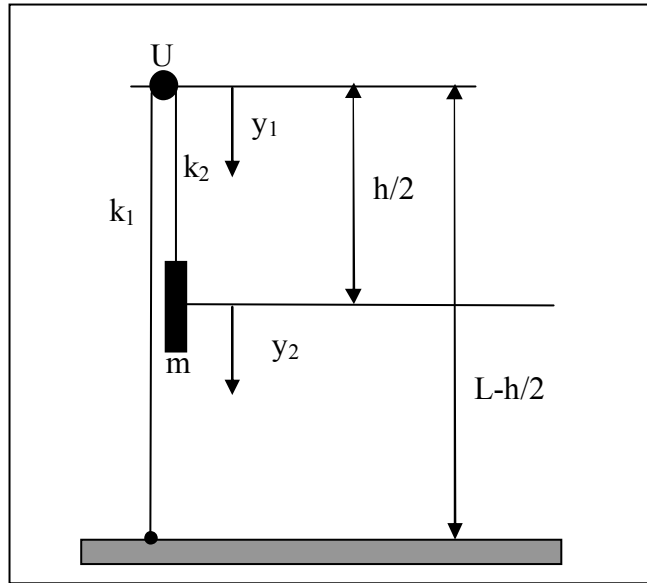


Abb.3: dieselbe Sturzsituation wie in Abb.1 zusätzlich mit Federkonstanten k_1 und k_2 links und rechts von der Umlenkung. y_1 ist die unter Krafteinwirkung stattfindende Verschiebung eines kleinen Seilelements von U aus gerechnet.

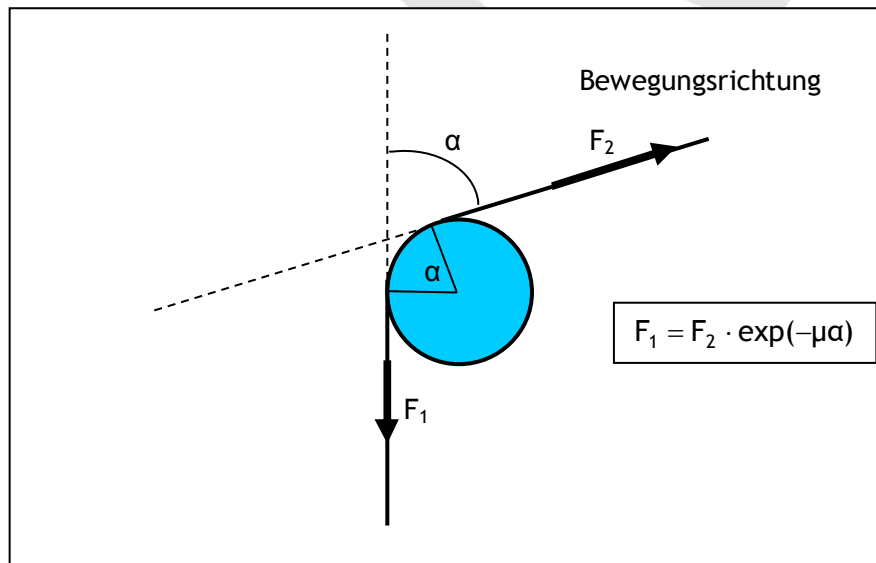


Abb.4: Wenn ein Seil mit einer Kraft F_2 über eine gekrümmte Fläche mit Reibungskoeffizient μ gezogen, dann ist die reduzierte Gegenkraft gegeben durch $F_1 = F_2 \exp(-\mu\alpha)$. Dies hat große Bedeutung beim Abseilen. In diesem Fall ist F_2 das Gewicht des Abseilenden. F_1 , als Kraft, die der Abseilende mit seinen Händen halten muss, wird ungefähr (je nach Reibungskoeffizient, ob alte oder neue Seile) um den Faktor $e^{\mu\alpha} \approx e^{2\pi \cdot 0.35} \approx 10$ reduziert, wobei α beim Abseilachter etwas mehr als 2π beträgt.

Zur Beschreibung der Reibung wird die Euler-Eytelwein Formel (siehe Abb.4) verwendet, die einen Zusammenhang zwischen den Kräften vor und hinter der Reibungsstelle U herstellt. Sie ändert die obige Gleichung für das Kräftegleichgewicht ab in

$$k_1 y_1 = k_2 (y_2 - y_1) \frac{1}{\rho} \quad (9)$$

mit $\rho = e^{\mu\alpha}$. In ρ tauchen der Winkel α , den das Seil mit der Umlenkung bildet ($\alpha \approx \pi$) und der Reibungskoeffizient μ auf. Gemessene μ zwischen Stahl und Nylon liegen bei etwa 0.35. Die auf der linken Seite von U auftretende Kraft $k_1 y_1$ (gleich der Kraft, die der Sichernde halten muss) wird durch die äußere Reibung um den Faktor $\rho^{-1} = e^{-\mu\alpha}$ verringert.

Wenn man die letzte Gleichung (9) nach y_1 auflöst und in (8) einsetzt, erhält man wieder eine Bewegungsgleichung für y_2 alleine

$$m \ddot{y}_2 + \frac{k_1 k_2 \rho}{\rho k_1 + k_2} y_2 = mg \quad (10)$$

(gültig solange $\dot{y}_2 \geq 0$). Dies ist die gleiche Bewegungsgleichung wie ohne Reibung (7) nur mit einer neuen effektiven Federkonstante

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_1 k_2 \rho}{\rho k_1 + k_2} = EA \frac{1}{(L - \frac{h}{2})\rho^{-1} + \frac{h}{2}} = EA \frac{1}{L_{\text{eff}}} \quad (11)$$

mit $L_{\text{eff}} = (L - \frac{h}{2})\rho^{-1} + \frac{h}{2}$. Wie zu erwarten, ist $k_{\text{eff}} \geq k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ (der Grenzfall ohne Reibung).

Da sich die Anfangsbedingungen nicht verändert haben und die Bewegungsgleichungen (7) und (9) sich nur durch die Federkonstante unterscheiden, kann man F_{max} analog zu (2) sofort hinschreiben:

$$F_{\text{max}} = mg + \sqrt{2mghk_{\text{eff}} + m^2 g^2} = mg + \sqrt{2mgEAf_{\text{eff}} + m^2 g^2} \quad (6'')$$

mit einem effektiven Sturzfaktor

$$f_{\text{eff}} = \frac{h}{L_{\text{eff}}} = \frac{\rho f}{1 + (\rho - 1)f/2} \quad (11)$$

Wenn die Reibung Null ist, d.h. $\rho = 1$, $L_{\text{eff}} = L$ und $f_{\text{eff}} = f$. Steigt die Reibung an, wird L_{eff} kleiner und geht für große Reibung, also $\rho \gg 1$, gegen $h/2$. Dann erhält man den Sturzfaktor 2. Die starke Reibung wirkt so, als ob das Seil im Umlenkpunkt festgemacht ist. Man kann also auch für ein weit ausgegebenes Seil einen großen Sturzfaktor bis 2 haben.

Wenn es zusätzlich Reibung am Fels gibt, kann es sogar noch schlimmer kommen. Betrachten wir den Sturz in einen Haken über einem Dach und dass das Seil beim Sturz stark an der Dachkante reibt, dann ist L_{eff} das Seilstück zwischen Stürzenden und Dachkante mit einem möglichen f_{eff} größer als zwei (siehe Abb.5).

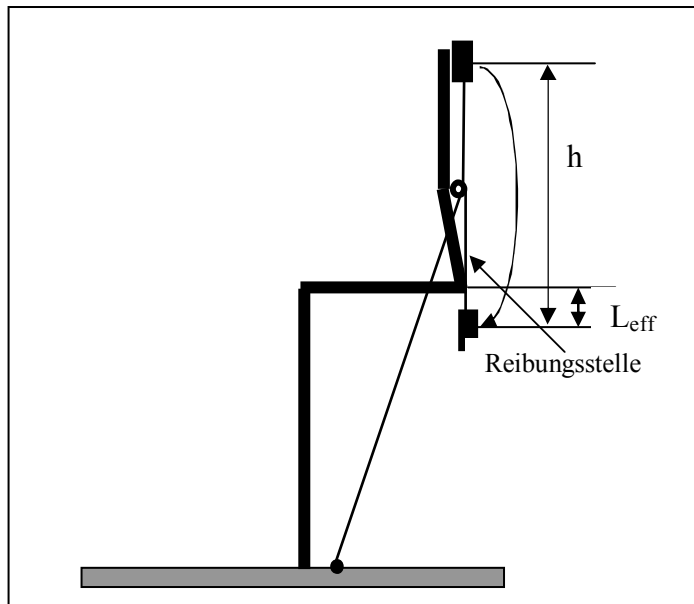


Abb.5: Sturz über Dachkante. Mit äußerer Reibung sind Sturzfaktoren größer 2 möglich, da bei einer Fallhöhe h L_{eff} kleiner werden kann als $h/2$.

Kraft auf die Umlenkung und auf den Sichernden

Die Kraft F^U auf die Umlenkung U ist die Summe der beiden Federkräfte links ($k_1 y_1$) und rechts ($k_2 (y_2 - y_1)$) von U :

$$F^U = k_2 (y_2 - y_1) + k_1 y_1 = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) k_2 (y_2 - y_1) = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) k_{\text{eff}} y_2. \quad (12)$$

Das Maximum von F^U ist also $F_{\text{max}}^U = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) F_{\text{max}}$ mit den Grenzfällen

$$F_{\text{max}}^U = \begin{cases} 2F_{\text{max}} & \rho = 1 \\ mg + \sqrt{4mgEA + m^2 g^2} & \rho \gg 1 \end{cases}$$

Wenn man den Normsturz als Maß heranzieht, dann ist F^U ohne Reibung etwa 16kN, was von der Bohrhakennorm (radial) mit 25kN nicht sorgenfrei entfernt ist.

Welche maximale Kraft F_{max}^S muss der Sichernde halten? Als gleich große Gegenkraft zu $k_1 y_1$ lautet sie

$$F_{\text{max}}^S = k_1 y_1 = k_{\text{eff}} y_2 \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} F_{\text{max}} \quad (13)$$

Bei großer Reibung geht die Kraft auf den Sichernden gegen Null (siehe Abb.6).

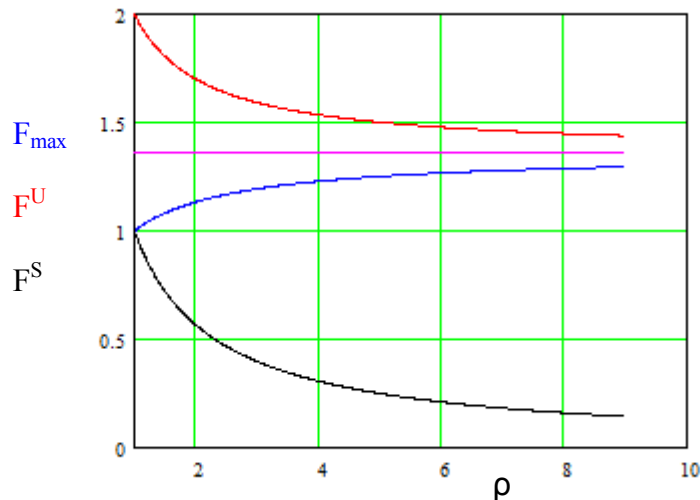


Abb.6: Während für den Stürzenden die äußere Reibung ρ den Sturz $F_{\max}$ (blau) härter macht, wird die Kraft F^S auf den Sichernden (schwarz) und die Kraft F^U auf die Umlenkung (rot) kleiner. Die Gerade (magenta) ist der Grenzfall Sturfaktor $f = 2$. Alle Stürze sind auf $F_{\max}$ ohne Reibung normiert.

Energiebilanz für den Fall mit Reibung an der Umlenkung

Wir geben noch die auftretenden Energien am Kraftmaximum bzw. Dehnungsmaximum an. Die elastische Energie $E_{\text{dehn}} = \frac{k_2}{2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{k_1}{2}(y_1)^2$ beträgt nach Elimination von y_1 mit Hilfe von (9)

$$E_{\text{dehn}} = \frac{1}{2}k_1k_2 \frac{k_2 + \rho^2k_1}{(k_2 + \rho k_1)^2} y_{2\max}^2 = \frac{EA}{L} y_{2\max}^2 \frac{2 + (\rho^2 - 1)f}{(2 + (\rho - 1)f)^2} \quad (14)$$

Mit der vereinfachten Form $\frac{y_{2\max}}{L_{\text{eff}}} = \frac{F_{\max}}{EA} \approx \sqrt{\frac{2mgf_{\text{eff}}}{EA}}$ erhält man

$$\frac{E_{\text{dehn}}}{mgh} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{2 + (\rho^2 - 1)f}{2 + (\rho - 1)f} \quad (14')$$

Die Gesamtenergie E_{total} ist gegeben durch die Anteile E_{dehn} , die dissipierte, in Wärme umgewandelte Energie E_{diss} (bis zum Dehnungsmaximum) und die potentielle Energie E_{pot}

$$E_{\text{total}} = E_{\text{dehn}} + E_{\text{diss}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} y_{2\max}^2 \left(\frac{k_1k_2\rho}{k_2 + k_1\rho} \right) - mgy_{2\max} = \frac{EA}{L} \frac{\rho}{2 + f(\rho - 1)} y_{2\max}^2 - mgy_{2\max} \quad (15)$$

Nun kann E_{diss} bestimmt werden

$$E_{\text{diss}} = \frac{EA}{L} y_{2\max}^2 \frac{(2 - f)(\rho - 1)}{(2 + f(\rho - 1))^2} \quad (16)$$

und mit der vereinfachten Form für $y_{2\max}$

$$\frac{E_{\text{diss}}}{mgh} = \frac{1}{\rho} \frac{(2-f)(\rho-1)}{2+f(\rho-1)} \quad (16')$$

E_{diss} verschwindet sowohl für $\rho = 1$ (keine Reibung) als auch im Fall $\rho \gg 1$ großer Reibung, hat also dazwischen ein Maximum. Für $f = 2$ verschwindet E_{diss} ebenfalls. Dies ist der Grund, warum bei der Diskussion des Normsturzes in guter Näherung die äußere Reibung vernachlässigt werden kann. Für kleine f hingegen, kann E_{diss} größer als E_{dehn} werden.

Fangstoß eines Seils mit viskoser Reibung

Das bekannte Maxwell Modell (siehe z.B. [7]) kann verwendet werden, um näherungsweise die innere Reibung eines Seils zu beschreiben. Mikroskopisch entsteht die innere Reibung, weil die Polymermoleküle der Seilstränge aus denen ein Seil besteht, nicht instantan sondern nur verzögert auf eine mechanische Belastung reagieren.

Das Modell besteht aus einem elastischen Element in Reihenschaltung mit einem viskosen Dämpfer (Abb.7).

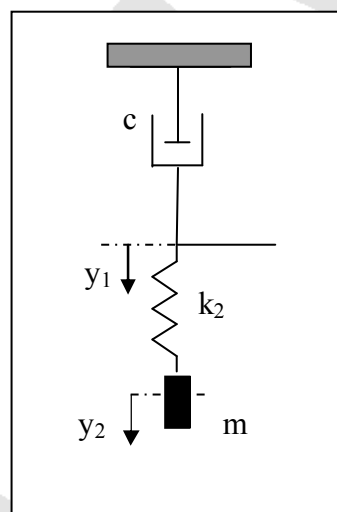


Abb.7: Maxwellmodell mit einer Feder k_2 und einem viskosen Element c .

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen sind leicht abgeleitet: die Kräfte auf die Masse m mit der Koordinate y_2 sind die Schwerkraft und die Rückstellkraft einer Feder $k(y_2 - y_1)$ in Analogie zu (8), so dass die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = mg \quad (17)$$

lautet. Eine zweite Gleichung für y_1 beschreibt das Dämpfungsglied mit einer Reibungskraft $c\dot{y}_1$. Diese Kraft wirkt der Federkraft entgegen, so dass gilt

$$k(y_2 - y_1) - c\dot{y}_1 = 0 \quad (18)$$

Um die Rechnungen nicht unnötig zu verkomplizieren, geben wir nur die exakten Ergebnisse der beiden obigen Differentialgleichungen für $g = 0$ an. Die Anfangsgeschwindigkeit ist wie oben $v_0 = \sqrt{2gh}$. Wenn man g Null setzt, dann bedeutet das, dass ab dem Zeitpunkt in dem sich das Seil zu dehnen beginnt, g ausgeschaltet ist. Dies ist für größere Stürze eine sehr gute Näherung.

Die Lösungen für F und für die innere Koordinate bei einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 lauten

$$F(t) = k_2(y_2(t) - y_1(t)) = m \frac{\omega^2}{\Omega} v_0 e^{-\kappa t} \sin(\Omega t) \quad (19)$$

$$y_1(t) = \frac{2\kappa v_0}{\omega^2} \left(1 + e^{-\kappa t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\kappa}{\Omega} \sin(\Omega t) \right) \right)$$

mit $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ und $\kappa = \frac{k}{2c}$.

Das Kraftmaximum ist gegeben durch

$$F_{\max} = m\omega v_0 \exp\left(-\frac{\kappa}{\Omega} \arctan\left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)\right) \approx m\omega v_0 \exp\left(-\frac{\pi\kappa}{2\Omega} + \frac{\kappa^2}{\Omega^2}\right)$$

Dies ist zu vergleichen mit dem früheren Ergebnis $F_{\max} = m\omega v_0$ gültig für $g=0$ und $\kappa=0$. Um die Formäquivalenz zur bekannten Fangstoßformel herzustellen, kann man in guter Näherung (der Fehler ist von der Ordnung κ^2/ω^2) auch schreiben

$$F_{\max} \cong mg + \sqrt{2mgEA \frac{h}{L} e^{-\frac{\pi}{2Q}} + m^2 g^2} \quad (6''')$$

mit $Q = \frac{\omega}{2\kappa}$.

Q wird oft als Gütefaktor bezeichnet. Er ist definiert als das Verhältnis aus Gesamtenergie und Energieverlust pro Schwingungsperiode, daher ist $1/Q$ ein Maß für die Dämpfung. Die innere Reibung verkleinert den Fangstoß exponentiell. Wird c sehr groß, also für $Q \gg 1$ geht der Exponentialterm gegen 1 und man erhält die ursprüngliche Form (6).

Leider ist es nicht möglich, auf einfache Weise Q und EA aus $F_{\max}$ und $y_{\max}$ zu bestimmen. Ein typischer Wert von Q für ein Kletterseil liegt bei $Q \sim 2$, d.h. die Energieabsorption beim

Maxwellmodell beträgt etwa $e^{-\frac{\pi}{8}} \approx 66\%$ bis zum Zeitpunkt des Fangstosses. Genauere Untersuchungen zeigen allerdings, dass das Maxwellmodell etwas zu hohe Werte für die Energieabsorption bis zum Fangstossmaximum liefert.

Das Maxwellmodell als dynamische Seilbremse

Wenn das viskose Element im Maxwell Modell als externe dynamische Seilbremse (HMS, Tube, etc.) interpretiert wird, dann können die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts auch verwendet werden, um eine Seilbremse zu beschreiben. c ist nun eine Kontrollvariable,

über die der Sichernde mit seiner Seilbremse verfügen kann. Die Bremsstrecke ist gegeben durch

$$y_1(\infty) = S = \frac{2\kappa v_0}{\omega^2} = \frac{mv_0}{c}$$

(siehe Gleichung (19)). Für großes c geht $y_1(\infty)$ gegen Null, dann gibt es keinen Seildurchlauf und man hat die alte Bewegungsgleichung (7) mit dem Fangstoß (6).

Bei festgehaltenem c wächst S mit der Wurzel aus der Fallenergie. Das Dämpfungsverhältnis für kleine κ , also kleine Bremsstrecken S , ist gegeben durch

$$\frac{F_{\max}}{F_{\max}(\kappa=0)} \approx \exp\left(-\frac{\pi\kappa}{2\omega}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{\omega S}{v_0}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{S\sqrt{2EAfgm}}{hgm}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{4} \frac{S}{h} \frac{F_{\max}^0}{mg}\right) \quad (20)$$

Die Bremsstrecke dämpft also den Fangstoß exponentiell. Hält man f konstant, dann muss ebenfalls das Verhältnis S/L konstant gehalten werden, damit der Dämpfungsfaktor (20) sich nicht ändert.

Ein Zahlenbeispiel mit $F_{\max}^0/mg=6$, und $S/h=0.5m/5m$ ergibt eine Fangstoßreduktion von etwa 40%.

Die absorbierte Energie E_A durch die Seilbremse kann mit Hilfe von $F_{\max}$ bestimmt werden und ist näherungsweise gegeben durch $E_A = \pi/4 S \cdot F_{\max}$, also Bremsstrecke mal Seilspannung.

Erweiterungen dieses Modells für eine Seilbremse lassen sich gut mit Hilfe der Gleichung (17) durchführen, wobei der zeitliche Verlauf von y_1 als Kontrollfunktion beliebig gewählt werden kann. Eine exakte Lösung von (17) ist beispielsweise für $y_1(t) = S(1 - e^{-t/\tau})$ mit zwei Kontrollparametern S und τ möglich.

Um eine Fangstossdämpfung zu erhalten, ist S natürlich positiv. Es ist aber auch $S < 0$ möglich, wie es dem Autor einmal passiert ist. Beschleunigt sich ein übereifriger Sichernder in die Gegenrichtung, dann erfährt der Stürzende einen viel größeren Fangstoss als den aus Gleichung (6).

Ist eine Verformung des stürzenden Körpers möglich, dann kann diese als ein weiterer Energie absorbierender Vorgang mit einem zusätzlichen viskosen Element c_K berücksichtigt werden. Die neue, zusammengesetzte Viskositätskonstante wird ermittelt durch Addition der Kehrwerte von c und c_K .

Fangstoß beim schrägen Fall

Der Autor war sich zu Beginn der Arbeit an diesem Abschnitt nicht bewusst, wie kompliziert die Physik für den schrägen Sturz ist. Die Bewegungsgleichungen für ein elastisches Pendel sind nichtlinear ohne große Chancen, einfache Ergebnisse zu erhalten. Deshalb beschränken wir uns einerseits auf kleine Winkelabweichungen vom geraden Sturz und auf den Fall des reinen Quergangs mit einem Anfangswinkel von 90° .

Kleine Winkel

Wie schon bei Gleichung (3) wird der Energiesatz am Umkehrpunkt der Seildehnung (d.h. $\dot{y} = 0$) benutzt. Der Umkehrpunkt liegt nicht, wie vielleicht vermutet, exakt bei $\theta_1=0$, aber

ganz in der Nähe. Mit den Anfangsbedingungen θ_0 und $v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gh_0 \cos(\theta_0)}$ lautet der Energiesatz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mga \cos(\theta_0) = \frac{1}{2}m(a+y)^2 \dot{\theta}_1^2 - mg(y+a) \cos(\theta_1) + \frac{1}{2}ky^2 \quad (21)$$

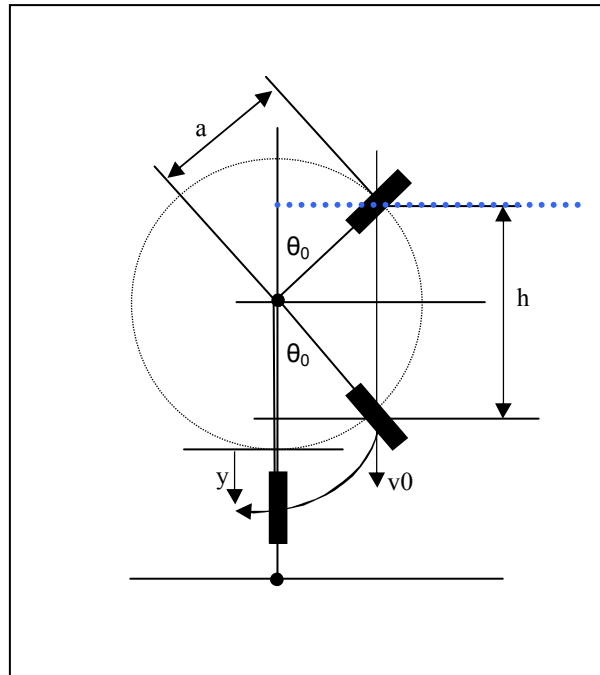


Abb.8: Die Geometrie des schrägen Sturzes. Anstatt $\theta_0=0$ (gerader Sturz) ist nun $\theta_0>0$. Die Länge des Seilstücks oberhalb der Umlenkung ist $a = \frac{h}{2 \cos(\theta_0)}$. Die blaue gepunktete Linie ist die Linie von Fangstößen gleicher Größe.

Abgesehen von den Kosinus- Anteilen der potentiellen Energie kommt im Vergleich zu (4) als neuer Term die Rotationsenergie $\frac{1}{2}m(a+y)^2 \dot{\theta}_1^2$ hinzu. $\dot{\theta}_1$ ist die Winkelgeschwindigkeit bei $y_{\max}$ und muss bestimmt werden. Dies ist möglich, wenn (wie schon bei der Diskussion der viskosen Reibung) nach dem freien Fall g ausgeschaltet wird, denn dann gilt exakt die Drehimpulserhaltung:

$$a^2 \dot{\theta}_0 \cong (a+y)^2 \dot{\theta}_1 \quad (22)$$

so dass sich der Energiesatz in folgender Weise vereinfacht

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{(a+y)^2} \sin^2(\theta_0) \right) = \frac{1}{2}ky^2 \quad (23)$$

Da der Term in der Klammer immer kleiner 1 ist, gilt $\frac{1}{2}ky^2 \leq \frac{1}{2}mv_0^2$ und folglich

$$F = ky \leq \sqrt{kmv_0^2} = F(\theta_0 = 0) \quad (24)$$

Für nicht zu große Winkel ($\theta_0 \leq 30^\circ$) ist der Fangstoß immer kleiner gleich dem Fangstoß beim geraden Sturz mit derselben Fallhöhe. Deshalb spielen kleinere Winkelabweichungen vom geraden Sturz keine wichtige Rolle für die Kraft aufs Seil und den Kletterer. Nur die reine Höhe über der Sicherung ist relevant.

Fangstoß beim Quergang



Abb.9: langer Quergang beim alpinen Klettern.

Auch hier wird die maximale Seildehnung $y_{\max}$ ungefähr bei $\theta_1 = 0$ erreicht, so dass der Energiesatz an dieser Stelle betrachtet wird. Da die Anfangsfallhöhe und damit die kinetische Energie zu Beginn des Sturzes beim horizontalen Quergang Null sind, erhält man

$$0 = -mg(y_{\max} + a) + \frac{1}{2}ky_{\max}^2 + \frac{1}{2}m(y_{\max} + a)^2\dot{\theta}_0^2 \quad (25)$$

Ohne die komplizierten Bewegungsgleichungen für y und θ zu lösen, gibt es keine Möglichkeit $\dot{\theta}_0^2$ zu bestimmen. Deshalb diskutieren wir zwei Grenzfälle.

E klein (weiche Seile)

In diesem Fall kann man die Rotationsenergie vernachlässigen, weil das Seil nicht auf eine gekrümmte Bahn gezwungen wird und sich zunächst senkrecht nach unten dehnt. Man erhält mit (25)

$$-g(y_{\max} + a) + \frac{1}{2} \frac{EA}{Lm} y_{\max}^2 = 0$$

was nach Auflösung nach $y_{\max}$ für den Fangstoß

$$F_{\max} = ky_{\max} = mg + \sqrt{2EAmg\hat{f} + m^2g^2} \geq 2mg \quad (6''')$$

ergibt, also die bekannte alte Formel mit einem Sturzfaktor $\hat{f} = a/L$. Es gilt $0 \leq \hat{f} \leq 1$ und für $E = 0$ erhält man den kleinsten Wert $2mg$.

E groß (harte Seile)

Wir betrachten das Kräftegleichgewicht bei $\theta_1 = 0$. Für große E liegt dort genau das Dehnungs- bez. das Kraftmaximum. Ist das Seil unendlich steif, dann ist die Seilspannung $ky_{\max}$ (diese bleibt endlich im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ und $y_{\max} \rightarrow 0$) die Gegenkraft zum Gewicht mg und der Zentrifugalkraft $ma\dot{\theta}_0^2$. Ist das Seil elastisch, dann gibt es zu diesem Zeitpunkt noch eine negative Beschleunigung, die das Seil am Umkehrpunkt wieder verkürzt und die Seilspannung verkleinert, so dass gilt

$$ky_{\max} \leq mg + ma\dot{\theta}_0^2$$

oder nach $\dot{\theta}_0^2$ aufgelöst $\dot{\theta}_0^2 \leq \frac{\omega^2 y_{\max} - g}{a}$. Man setzt $\dot{\theta}_0^2$ in den Energiesatz (25) ein zusammen mit $y_{\max} = 0$, so dass

$$0 = -mga + \frac{1}{2} ma^2 \dot{\theta}_0^2$$

gilt und man schließlich

$$ky_{\max} = F_{\max} \leq 3mg$$

bekommt. Die Kraft auf den Kletterer und die Seilspannung liegen für den Quergang also zwischen

$$2mg \leq F_{\max} \leq 3mg$$

während beim geraden Sturz $F_{\max}$ von E abhängt und beliebig groß werden kann. Auch hier sei darauf hingewiesen, dass in Bezug auf den Fangstoß ein Sturz im Quergang eher harmlos ist, aber die große Fläche, die vom Seil und dem stürzenden Kletterer überstrichen wird, die Gefahr birgt, am Fels mit hoher Rotationsgeschwindigkeit aufzuschlagen.

Schluss

In dieser Arbeit wurde die Fangstoßformel diskutiert, die in Variationen immer wieder in der Sturz- und Seilphysik auftaucht.

Man sollte jedoch trotz ihrer Wichtigkeit nicht vergessen, dass ihr ein sehr einfaches Seilmodell zugrunde liegt. So ist eine ganz genaue Beschreibung des Normfangstosses nur mit Berücksichtigung des nichtlinearen Seilverhaltens bei größeren Dehnungen und der Seilmasse möglich.

Ebenso entspricht der modellhafte Charakter der angenommenen Fallsituationen nicht immer ganz der Kletterpraxis. Manche reale Situationen können nur schwer oder gar nicht mathematisch beschrieben werden, wie z.B. das Aufschlagen des Kletterers auf den Fels. Dies ist oft viel unangenehmer als die Kraft, die das Seil auf den Kletterer ausübt.

Trotz alldem bekommt man mit Hilfe der abgeleiteten Beziehungen ein besseres Verständnis für alle Kräfte, die beim Sturz auftauchen. Zusätzlich macht die Sturzphysik als ein Gebiet der angewandten Mechanik auch eine Menge Spaß, nicht zuletzt deshalb weil manche Antworten verblüffend sind und nicht der Intuition entsprechen.

Referenzen

- [1] A.Wexler, *The Theory of Belaying*, reprinted from THE AMERICAN ALPINE JOURNAL Vol.VII, 4 (1950)
- [2] S.Attaway, *Rope System Analysis* (1996), lamountaineers.org/pdf/xRopes.pdf
- [3] R.Goldstone, *The Standard Equation For Impact Force* (2006), www.rockclimbing.com/cgi-bin/forum/gforum.cgi?do=post_attachment;postatt_id=746
- [4] T.Czermin, P.Dullnig, L.Mathelitsch, W.Schneider, *Bergsteigen und Klettern - was sagt die Physik dazu?*, Physik in unserer Zeit 2 (2001)
- [5] R.Stör, *Ungeahnte Kräfte*, Klettern Mai 2002
- [6] W.Fimml, M.Larcher, *Energie ist Kraft mal Weg*, Berg&Steigen 4 (2000)
- [7] U.Leuthäusser, *Seilphysik Teile 1, 2 und 3* (2012), www.sigmadewe.com/bergsportphysik.html
- [8] R.A.Smith, *The development of equipment to reduce risk in rock climbing*, Sports Engineering 1, 27-39 (1998), personal.strath.ac.uk/andrew.mclaren/Smith.pdf
- [9] Sturzfoto mit freundlicher Genehmigung von Urs Leuthäusser