Übers Bergaufgehen:

Gehzeiten, Energieverbrauch und Zick-Zack Übergang

Version 1 (28.11.2012)

Ulrich Leuthäusser

Es wird ein einfaches Modell präsentiert, das mit Hilfe einer Gleichung für die Leistungsbilanz und einem kräfteabhängigen Wirkungsgrad Zeiten fürs Bergaufgehen berechnen kann, die mit gemessenen Zeiten gut übereinstimmen.

Einleitung

Ursprünglich war der Anlass, sich mit diesem Thema zu beschäftigen, ein Artikel in der ZEIT [1] und der anschließende professorale Fußtritt an selber Stelle [2]. Dies alles ist nach einem halben Jahr verblasst und das eigentliche Thema ist zu Recht in den Vordergrund gerückt. Trotzdem soll kurz über die zwei ZEIT-Artikel berichtet werden, sei es spaßeshalber oder wegen der etwas beunruhigenden Schlussfolgerungen über die Genauigkeit im Journalismus.

Vorgestellt wurde damals die "ultimative" Wanderformel von Kromer [3] (nachfolgend als Schweizer Formel bezeichnet) in Form eines Regressionspolynoms 15.Grades. Ein offenbar sehr beeindruckter Journalist berichtete von dieser Arbeit [1], die eine Berechnung von Gehzeiten im Gebirge unter Berücksichtigung der zu überwindenden Höhendifferenz und der Horizontaldistanz beinhaltet. An Superlativen fehlte es in diesem ZEIT Artikel wirklich nicht, und etwas verwundert war man darüber schon. Prompt folgte auch die Kritik [2], die Schweizer Formel wurde in die Nähe eines Aprilscherzes gestellt. Eine Parabel, also ein Polynom 2.Grades, hieß es, würde vollständig ausreichen und außerdem läge ein Fehler in Form von "overfitting" vor. Beides ist nicht richtig. Wie in aller Welt können unterstellte 15 Messwerte, die sicher streuen, alle genau auf einer so glatten Kurve liegen?

Die Schweizer verwendeten 162 Messpunkte und sind damit weit vom overfitting entfernt (eine Regel besagt, der Grad des Polynoms sollte nicht größer sein als zwei Mal die Wurzel aus den Fitpunkten). Man ist vielmehr in das sogenannte Bias-Variance Dilemma geraten.

Die hohe Detailgenauigkeit bei solch einem Ansatz führt zu einer verschwindend kleinen Verallgemeinerungsfähigkeit außerhalb des Messbereichs. Wenn man jedoch nur an diesen Bereich, in dem die Messpunkte vorliegen, interessiert ist (so wie es die Schweizer waren), ist der Fit mit diesem Polynom vielleicht nicht besonders elegant, aber korrekt. Hätten im übrigen die Schweizer die Wanderzeiten mit einer mickrigen Parabel berechnet, hätten sie es wohl nicht auf die erste Seite des Wissensteils der ZEIT geschafft. Aber nicht nur aus Marketing-Gesichtspunkten ist ein komplizierterer Ansatz als die Parabel nötig. In der akademischen Literatur gibt es zu diesem Thema Ansätze mit höheren Polynomen zuhauf, um die genaue experimentelle Kurvenform zusammen mit dem Gefälle zu erfassen. Dieser Schnellschuss des Kritikers ging also voll daneben, die zwei Interviewpartner haben sich mit dem Thema gar nicht ernsthaft beschäftigt und sich auch nicht über bestehende Arbeiten informiert.

Nun zu der vorliegenden Arbeit. Es wird ein physikalisches Modell aufgestellt, das das Problem, welchen Grad das Polynom besitzen sollte, gar nicht hat. Aus einer Gleichung für die mechanische Leistung, die der Berggeher aufbringen muss, folgt zwangsläufig die Gehzeit in einer relativ einfachen Form (als Lösung einer quadratischen Gleichung, deren Taylorentwicklung natürlich nie abbricht). Der Vorteil des Modells gegenüber einem rein deskriptiven Ansatzes liegt auf der Hand: wichtige Größen, wie z.B. die Masse (Einfluss des Rucksacks) und die Leistung des Berggehers gehen in die Gehzeit ein und ihr Einfluss kann untersucht werden. Die hier abgeleitete Gehzeitformel wird verglichen mit anderen Ansätzen, unter anderem natürlich auch mit der Schweizer Formel und mit einer alten Daumenregel, der sog. Naismith Regel, die sich als ein einfacher Spezialfall der allgemeinen Gehzeitformel erweist. Schließlich wird der sogenannten Zick-Zack Übergang diskutiert, der bei allen Modellen und Ansätzen, die eine konvexe Form für die Gehzeit als Funktion der Steigung haben, auftaucht.

Die Leistungsbilanz fürs Bergaufgehen

P ist die mechanische Leistung, die man beim Bergaufgehen gegen eine Gesamtkraft F aufwenden muss und die sich aus der Komponente der Schwerkraft F_β = mg sin(β) und der Kraftkomponente F_{hor}cos(β) zum Gehen in der Ebene zusammensetzt (siehe Abbildung 1). Die Kraft zum Gehen in der Ebene hat dissipativen Charakter, da der Schwerpunkt eine periodische Auf- und Abwärtsbewegung macht, ohne dass bei der Abwärtsbewegung die potentielle Energie zurück gewonnen wird.

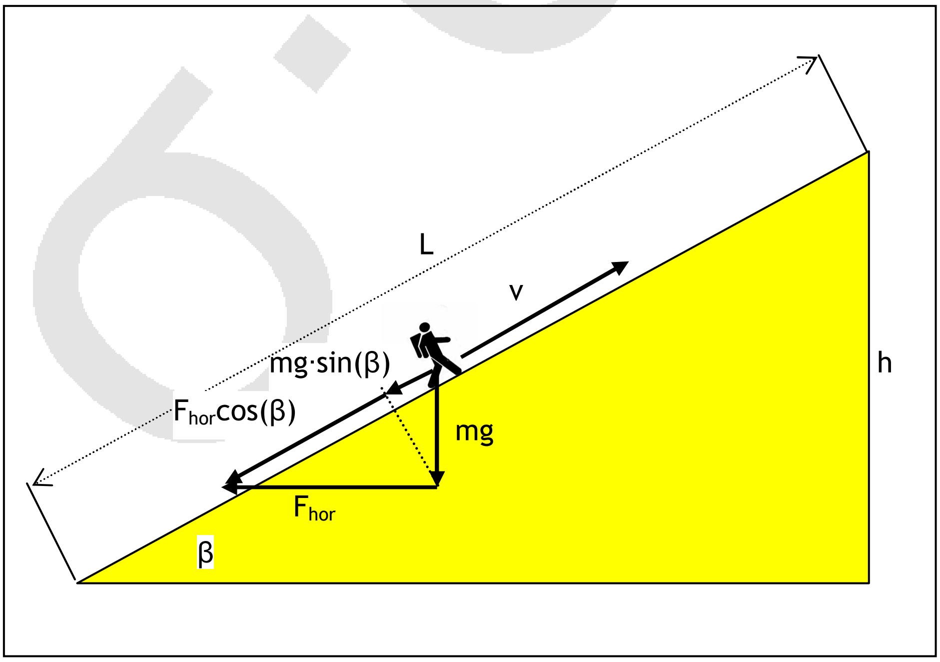

Abb.1

Damit lautet die Leistungsbilanz

$$P = (\vec{F}_{hor} + \vec{F}_{vert}) \cdot \vec{v} = F_{hor} v \cos(\beta) + mgv \sin(\beta) \qquad (1)$$

Es stellt sich sowohl experimentell als auch durch Modelle heraus, dass die Kraft zum Gehen in der Ebene linear mit der Geschwindigkeit variiert, also $F_{hor} = \lambda m v_{hor}$. Die "Reibungskonstante" λ ist dabei experimentell etwa 4/3 sec^{-1} [4] und für das "inverted pendulum" Gehmodell [5] gilt

$$\lambda_{IP} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{g}{6L_{Bein}}} = 1.004 \cdot \sqrt{\frac{1}{L_{Bein}}} .$$

Zusammen mit $F_\beta = mg\sin(\beta)$ erhält man

$$P = \lambda m v^2 \cos(\beta)^2 + F_\beta v \qquad (2)$$

Kraftabhängigkeit der Leistung P und Bestimmung des Wirkungsgrads η

Ganz offensichtlich hängt die Leistung P, die von Muskeln erzeugt wird, von der angreifenden, äußeren Kraft F ab. Dies sieht man schon daran, dass ab einer bestimmten Maximalkraft überhaupt keine Bewegung des Muskels mehr möglich ist. Die Kontraktionsgeschwindigkeit ist dann Null. Man kann also nicht, wie es die Gleichung P = Fv im Prinzip erlaubt, für jedes noch so große F mit einem immer kleineren v die Leistung P konstant halten. Auch für zu kleine Kräfte sinkt die Leistung, da eine schnelle Muskelkontraktion mit geringer Kraftentwicklung verbunden ist, so dass P ein Maximum besitzt, das bei einer optimalen Kraft F_{opt} erreicht wird. Diese optimale Kraft ist mit einer optimalen Muskelgeschwindigkeit verknüpft, die z.B. die optimale Trittfrequenz beim Radfahren bestimmt. Mathematisch wird dies durch die Hill'sche Gleichung [6,7,8] zur Beschreibung des Muskelverhaltens ausgedrückt. Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen der Muskelkontraktionsgeschwindigkeit und der angelegten, äußeren Kraft F her.

Multipliziert man die Kontraktionsgeschwindigkeit noch mit F, dann erhält man die Hill'sche Gleichung in der Form

$$P = F v_{max} \frac{F_{max} - F}{F_{max} + bF} \qquad (3)$$

wobei v_{max} die maximale Kontraktionsgeschwindigkeit des Muskels ist und F_{max} die maximale (isometrische) Kraft des Muskels. b ist ein Parameter, der zwischen 1 und 4 liegt.

Um die Beschreibung möglichst einfach und allgemein zu halten, betrachten wir die Umgebung von P_{opt} und entwickeln die äußere Kraft F um die zu P_{opt} gehörige optimale Kraft F_{opt} (siehe Abbildung 2)

$$P \cong P_{opt} - v_{max} \frac{(F - F_{opt})^2}{F_{max}\sqrt{1+b}}$$

Damit kann man eine Art Wirkungsgrad η mit Hilfe $P = \eta P_{opt}$ definieren, nämlich

$$\eta = 1 - v_{max} \frac{(F - F_{opt})^2}{F_{max}\sqrt{1+b}} \frac{1}{P_{opt}} \cong \frac{1}{1 + v_{max} \frac{(F - F_{opt})^2}{F_{max}\sqrt{1+b}} \frac{1}{P_{opt}}} = \frac{1}{1 + a\left(\frac{F - F_{opt}}{mg}\right)^2} \tag{4}$$

η ist zwar über die Hill'sche Gleichung abgeleitet worden, ist aber allgemeiner, da η schon aus der Tatsache folgt, dass P ein Maximum besitzt. η darf nicht verwechselt werden mit dem Wirkungsgrad, der die Umwandlung chemischer Energie in mechanische Energie beschreibt und der etwa ¼ beträgt. Es wird die letzte Beziehung aus (4) weiterverwendet, um zu vermeiden, dass der Wirkungsgrad negativ werden kann. a kann durch die Hill'schen Parameter F_{max} und b ausgedrückt werden und ist gegeben durch

$$a = (mg)^2 \frac{v_{max}}{F_{max}\sqrt{1+b}} \frac{1}{P_{opt}} = \left(\frac{mg}{F_{max}}\right)^2 \frac{b^2}{\sqrt{1+b}(2+b) - 2(1+b)} \cong 4.7 \cdot \left(\frac{mg}{F_{max}}\right)^2 \tag{5}$$

Die letzte Beziehung gilt für b = 4.

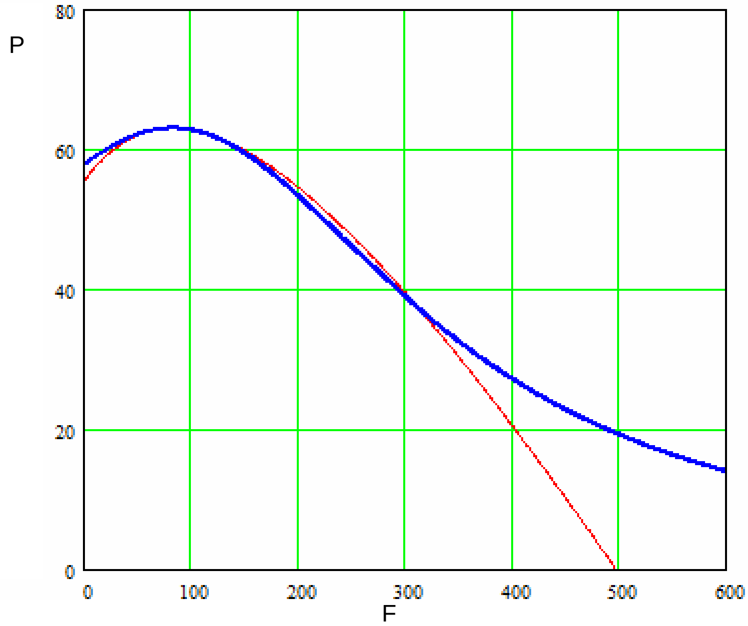

Abb.2: mechanische Leistung P aus dem Hill'schen Muskelmodell (rot) und die Approximation ηP_{opt} aus Gl. (4) (blau) in Abhängigkeit der äußeren Kraft F

Setzt man η in (2) ein, dann erhält man $\dfrac{P_{opt}}{1+a\left(\dfrac{F-F_{opt}}{mg}\right)^2} = \lambda m v^2 \cos(\beta)^2 + F_\beta v$.

Da die Geschwindigkeit für größere β sowieso stark abnimmt, ist der cos(β) nicht besonders von Bedeutung und der Einfachheit halber setzen wir cos(β) = 1 und nehmen zusätzlich an, dass $F_{hor} \approx F_{opt}$. Obwohl F_{opt} für F_{max}~mg etwas größer als F_{hor} ist, ist der Fehler, den man durch diese Annahme macht, klein (siehe das flache Maximum von P in Abb.2). Man erhält dann

$$\frac{P_{opt}}{1+a\left(\dfrac{F_\beta}{mg}\right)^2} = \lambda m v^2 + F_\beta v \qquad (6)$$

Für ß = 0 ergibt sich $P_{opt} = \lambda m v^2$, die Leistungsgleichung in der Ebene. Beim Bergauffahren mit dem Fahrrad erhält man eine ähnliche Gleichung wie (6), sofern man erstens berücksichtigt, dass man bis auf sehr große Steigungen durch Wahl des optimalen Ganges immer den Wirkungsgrad η = 1 (d.h. a = 0) erreicht und zweitens man noch den Luftwiderstand als zusätzliche Kraft (multipliziert mit v) auf der rechten Seite von (6) addiert.

Wenn man den Ausdruck (6) durch h, L und T ausdrückt, folgt

$$\eta(h/L)\cdot P_{opt} = \frac{P_{opt}}{1+a\left(\frac{h}{L}\right)^2} == \lambda m\left(\frac{L}{T}\right)^2 + mg\frac{h}{T} \qquad (7)$$

Aufgelöst nach T, erhält man dann

$$T(h,L) = \frac{1}{2\cdot\eta(h/L)\cdot P_{opt}}\left[mgh + \sqrt{(mgh)^2 + 4P_{opt}\eta(h/L)\lambda m L^2}\right] \qquad (8)$$

Es stellt sich heraus, dass der Wirkungsgrad η(h/L) unter der Wurzel in sehr guter Näherung Eins gesetzt werden kann, so dass (8) noch etwas einfacher wird:

$$T(h,L) = \frac{L}{2\cdot\eta(h/L)\cdot\left(\frac{P_{opt}}{m}\right)}\left[g\frac{h}{L} + \sqrt{\left(g\frac{h}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{P_{opt}}{m}\right)\lambda}\right] \qquad (9)$$

Setzt man h = 0, erhält man die Gehzeit in der Ebene, gegeben durch $T(0,L) = L\sqrt{\frac{\lambda m}{P_{opt}}}$. Die Reibungskonstante λ für die innere Reibung führt zu längeren Gehzeiten und vermutlich könnte man die Bodenbeschaffenheit, die beim Gehen im Gebirge eine große Rolle spielt, als äußere Reibung in diese Reibungskonstante mit einschließen. T(h,L) ist bei konstantem h/L proportional zur Gehstrecke L. Hält man also die Steigung konstant und verdoppelt die Gehstrecke L, dann verdoppelt sich auch die Gehzeit. Dies gilt sicher nur in einem bestimmten Zeitbereich, denn bei sehr kurzen wie auch bei sehr langen Anstiegen müssen Ermüdungseffekte berücksichtigt werden. In der Praxis lassen sich bei Einhaltung von Pausen konstante Geschwindigkeiten über relativ lange Zeiten durchhalten, so dass man bei einer Verdopplung der Gehzeit bei konstanter Steigung etwa auch die doppelte Strecke zurücklegt.

Es wird nun die Gehzeit (9) mit drei anderen Ansätzen aus der Literatur verglichen.

1. Die älteste Beziehung ist eine Faustregel von Naismith. In ihrer einfachsten Form besagt sie, dass man für 4.8 km (ursprünglich 3 Meilen) Weglänge 1 Stunde benötigt. Hinzu kommt eine weitere Stunde, wenn der Weg 600m bergauf führt. In einer Formel zusammengefasst bedeutet dies:

$$T = \frac{L}{v} + \frac{h}{v_{vert}} \tag{11}$$

mit

$$v_{vert} = 0.6\frac{km}{h} = 0.17\frac{m}{sec} \quad \text{und} \quad v = 4.8\frac{km}{h} = 1.33\frac{m}{sec}.$$

Nimmt man eine geschwindigkeitsunabhängige Kraft entlang des Wegs an und berücksichtigt man noch die Schwerkraft, dann folgt analog zu (1) $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = vF_0 + vmg\sin(ß)$ und aufgelöst nach T

$$T = \frac{L}{P}\left(F_0 + mg\sin(ß)\right) = \frac{LF_0}{P} + \frac{mg}{P}h \tag{12}$$

Durch Vergleich mit (11) folgt $v_{vert} = \frac{P}{mg}$. Mit den Standardwerten P=125W und m=70kg erhält man v_{vert} = 0.18 m/sec, nahe am Wert von Naismith von 0.17 m/sec.

2. Eine einfache exponentielle Beziehung stammt von Davey, Hayes und Norman [9], hier als DHN abgekürzt, die in der Arbeit von Kay [10] verwendet wird. Sie ist gegeben durch $v_{hor} = \frac{L_{hor}(h)}{T} = v_{hor}(ß = 0)e^{k \cdot ß}$, so dass

$$T_{DHN} = \frac{L_{hor}(h)}{v_{hor}(ß = 0)}e^{-kß} = T_{DHN}(ß = 0)\cos(ß)e^{-kß} \tag{13}$$

was nur gültig ist für Steigungen größer Null. k ist der einzige Parameter, der in den zitierten Arbeiten zwischen 3 und 4 variiert wurde. Hier verwenden wir k = 3.9.

3. Schließlich wird noch die Schweizer Formel zum Vergleich mit (9) herangezogen.

Sie besteht, wie schon erwähnt, aus einem Polynom 15.Grades mit Koeffizienten C_j [3]:

$$T_K(h) = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{1000}\sum_{i=0}^{15} C_i\left[\frac{100h}{\sqrt{L^2 - h^2}}\right]^i \tag{14}$$

gültig in einem Bereich $|h/L| < 0.37$.

Der Vorteil des physikalischen Modells (9) gegenüber den vorgestellten deskriptiven Ansätzen liegt auf der Hand: alle vorkommenden Größen haben eine Bedeutung mit Einfluss auf die Gehzeit, der experimentell untersucht werden kann. So wäre es einfach, mit einem Laufband die Leistungsabhängigkeit von T bei gegebener Steigung zu messen. Außerdem ist eine mathematische Struktur erzeugt worden, die direkt für Regressionsansätze verwendet werden kann.

In der unteren Abbildung 3 werden die drei Gehzeitenformeln als Funktion der Steigung aufgetragen und mit T(h,L) aus Gleichung (9) verglichen.

Die im relevanten Bereich lineare Naismith Kurve (11) ist eine Art Mittelung der konvexen Kurven und stellt eine grobe Näherung dar. Die Gehzeit aus (9) stimmt mit der von DHN(13) überein, wenn P_{opt} = 150W, a = 4.5 und λ = 4/3 sec^{-1} gewählt wird. Wählt man P_{opt} = 120W mit gleichem a und λ, dann kann Gleichung (9) die Schweizer Formel (14) reproduzieren.

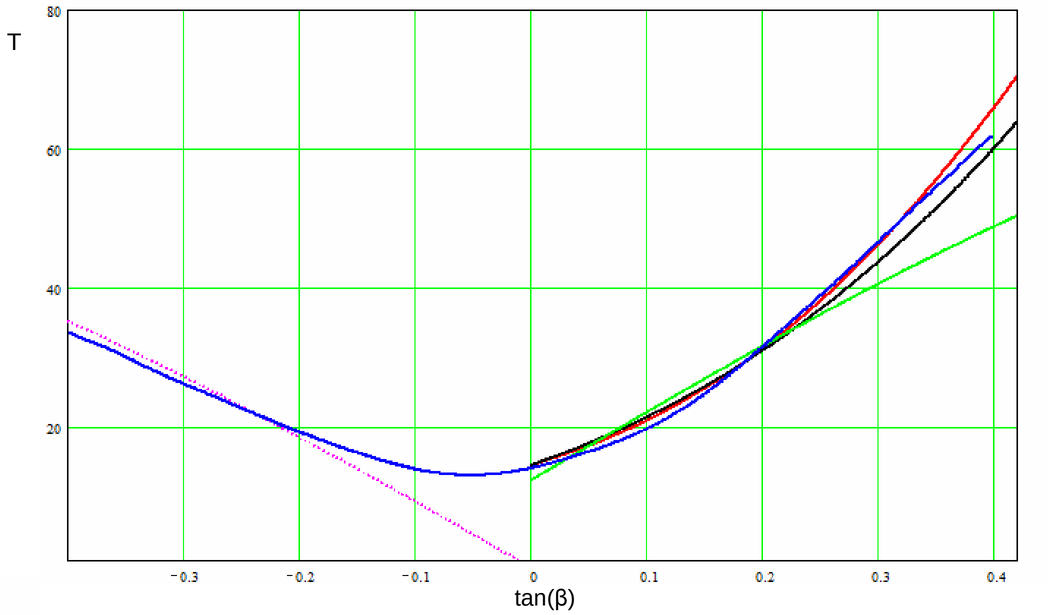

Abb.3: Gehzeiten T in Minuten der verschiedenen Ansätze als Funktion der Steigung für eine Strecke L=1000m. Gl. (9) (rot), Gl. (14) (blau), Gl. (13) (schwarz), Gl. (11) (grün) und Gl.(15) (magenta gepunktet). Für (9) wurde P_{opt} = 120W gewählt, um Übereinstimmung mit der Schweizer Formel zu erhalten.

Die Gehzeit T hängt nicht nur von der Steigung ab, sondern wird von P_{opt}/m und F_{max}/m bestimmt. In Abbildung 4 ist diese starke Abhängigkeit der Gehzeit von der Leistung P_{opt} dargestellt.

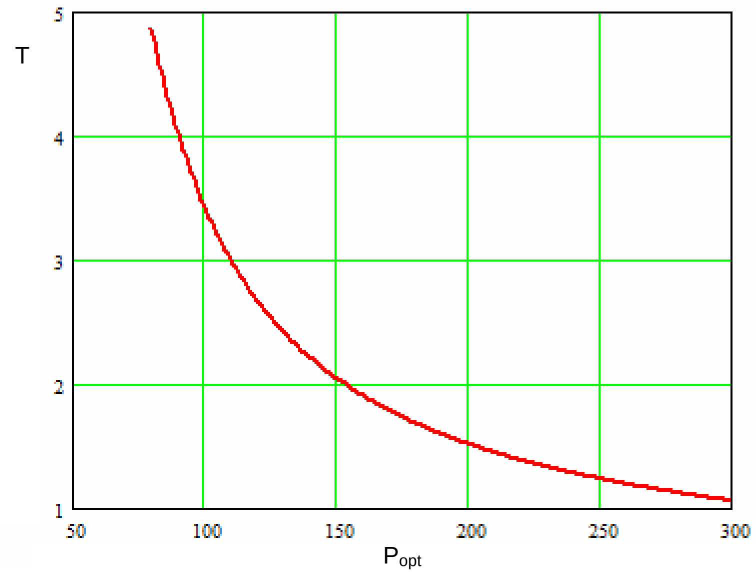

Abb.4: Gehzeit T aus Gleichung (9) in Stunden als Funktion von P_{opt} [W]. Es wurde eine typische Situation mit h=1000m und L = 4000m gewählt.

In der Praxis kann man seine individuelle Gehzeit T_{ind} mit Hilfe von (9) und des Bezugspunktes $T(P_{opt}=120W)$ mit der Standardleistung P_{st} = 120W aus der Schweizer Formel (daher gültig für die Schweizer Wanderwege) abschätzen mit $T_{ind} \approx \frac{P_{st}}{P_{ind}} T_{st}$, sofern die eigene Leistung P_{ind} bekannt ist. Für andere Gebiete gilt eine analoge Beziehung mit anderen Bezugspunkten.

Das Bergabgehen

Schon ein ganz einfacher Ansatz kann einen Teil der Abwärtsbewegung erklären. Um eine konstante Geschwindigkeit bergab zu halten, muss eine Bremskraft mgsin(β) aufgebracht werden. Dazu steht die Leistung P_{opt} zur Verfügung, so dass $P_{opt} = -mg\dot{h}$.

Nach der Gehzeit aufgelöst, erhält man

$$T = \frac{mg|h|}{P_{opt}} \tag{15}$$

Der Wirkungsgrad für die exzentrische Bremsbewegung ist dabei 1 gesetzt worden. Es ist erstaunlich, dass diese einfache Überlegung den Teil der Schweizer Formel für starkes Gefälle mehr als -20% erklären kann (siehe Abbildung 3).

Der Übergangsbereich zwischen T(h = 0) und T(h/L ≈ -0.2) wird nicht genauer untersucht, weil in dieser Arbeit vor allem der Anstieg interessiert. Soviel ist jedoch sicher, dass die innere Reibung für die Horizontalbewegung im Übergangsbereich allmählich verschwindet, weil sich die Hüfte nicht mehr gegen die Schwerkraft heben muss und so schließlich Gleichung (15) alleine die Bergabgehzeiten bestimmt.

Benötigte Energie, Leistungsanteile

Die Beziehung $P = \eta P_{opt}$ kann man mit der benötigten Gesamtenergie (inklusive Wärme) für den Weg in Verbindung bringen, denn es gilt $E_{mech} = T\eta P_{opt} = \eta_1 E$. Wenn nun die zwei Wirkungsgrade η und η_1 zueinander proportional sind, dann ist der Gesamtenergieverbrauch E auch proportional zu Gehzeit T:

$$T \propto E \tag{16}$$

Dieses Ergebnis wird durch die sehr gute Übereinstimmung mit einer Messkurve für den Gesamtenergieverbrauch (Llobera und Sluckin [11]) bestätigt, wie in der folgenden Abbildung 5 zu sehen ist. Zum Vergleich ist der Energieverbrauch für den Wirkungsgrad η = 1 mit eingezeichnet, der für große Steigungen deutlich niedriger ist. Diese starke Zunahme des Energieverbrauchs für größere Steigungen führt schließlich zu dem noch zu diskutierenden Zick-Zack Übergang.

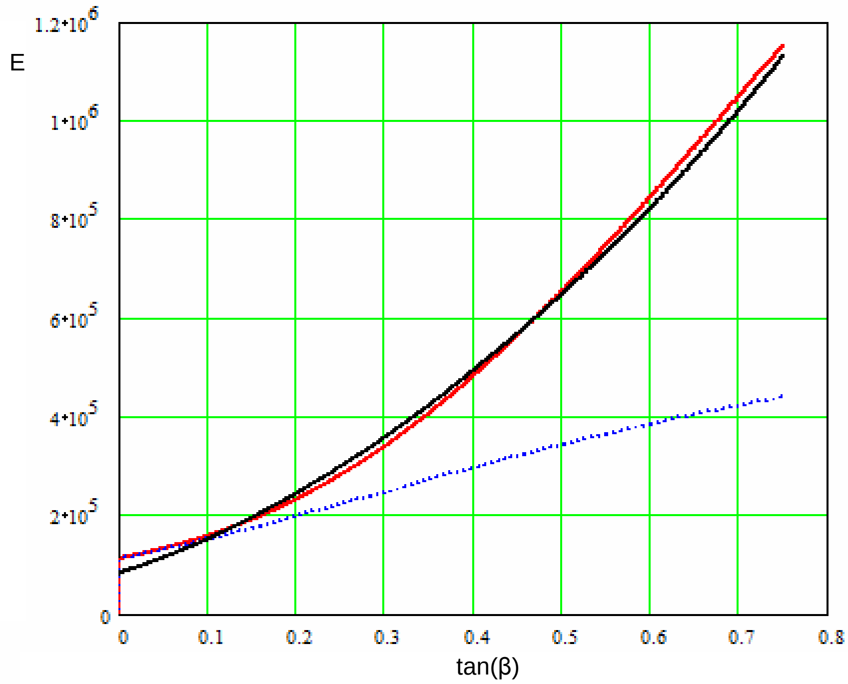

Abb.5: Energieverbrauch E[J] beim Bergaufgehen als Funktion der Steigung tan(β) für das Modell (9,16) (schwarze Kurve) im Vergleich mit [11] (rot) und dem Energieverbrauch für Wirkungsgrad 1 (blau gestrichelt).

Die Abbildung 6 zeigt die Leistungsanteile für den Anstieg und für die Horizontalkomponente des Gehens, die für größere Steigungen stark gegen Null strebt.

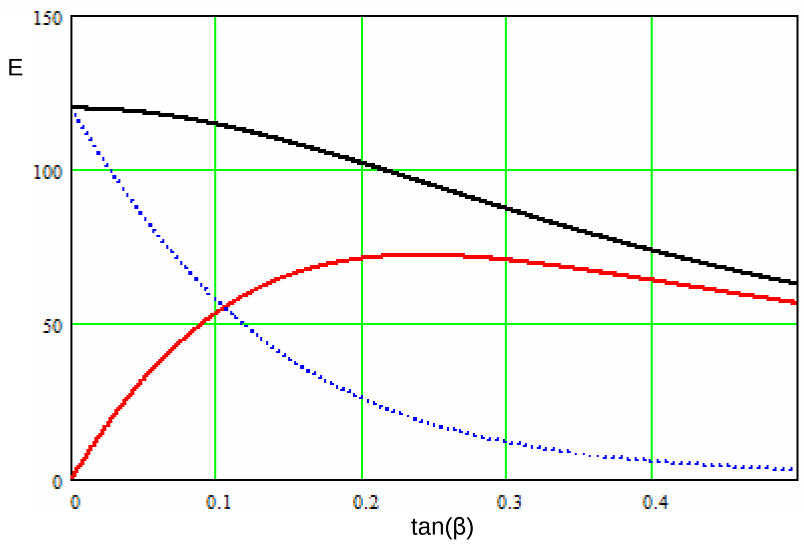

Abb.6: Gesamtleistung (schwarz) zusammengesetzt aus Steigleistung (rot) und der Leistung fürs Gehen in der Ebene (blau) als Funktion der Steigung.

Der Zick-Zack Übergang

Ein interessanter Gesichtspunkt ist der sog. Zick-Zack Übergang. Jeder Bergwanderer oder auch Skitourengeher weiß, dass es ab einem kritischen Steigungswinkel günstiger ist, einen längeren Weg (in der Regel Zick-Zack, siehe folgende Abbildung 7) zu wählen, um eine kürzere Anstiegszeit zu erhalten. In der Literatur erschien dies offenbar zum ersten Mal in der schon erwähnten Veröffentlichung von Davey, Hayes und Norman [9]. Eine größere Aufmerksamkeit erfuhr der Zick-Zack Übergang später durch die Arbeit von M. Llobera und T.J. Sluckin [11].

Abb.7: Zick-Zack Übergang auf dem Weg zum Stripsenjoch (Wilder Kaiser)

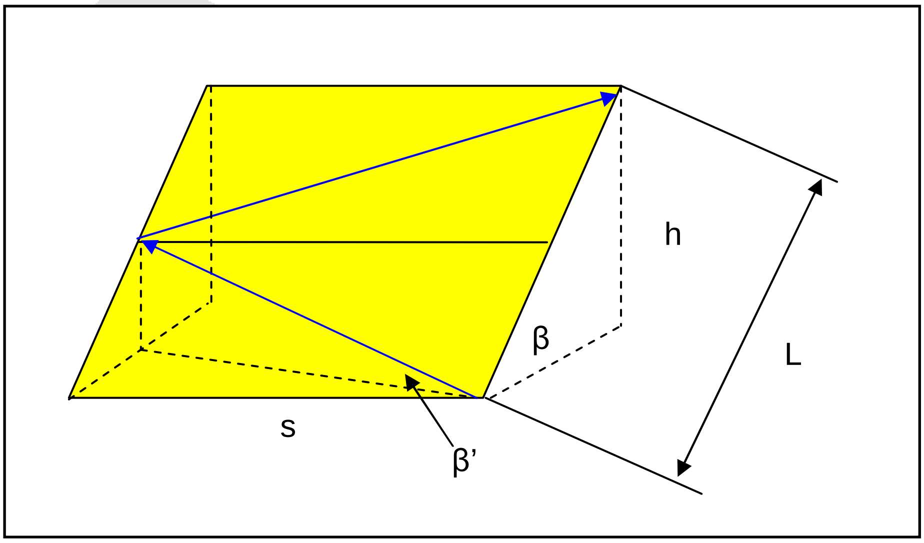

Abb.8 : siehe Text.

Man geht folgendermaßen vor: es werden Zick-Zack Wege mit einer Weglänge $L' = \sqrt{4s^2 + L^2}$ mit s als Seitenlänge des gelben Rechtecks in der obigen Abbildung 8 zugelassen und L' in Gleichung (9) eingesetzt. Nun wird untersucht, ob es ab einem bestimmten $h_c/L = \sin(\beta_c)$ ein $s > 0$ gibt, das zu einer kleineren Gehzeit führt als für $s = 0$.

In der Abbildung 9 ist der Übergang zu $s > 0$ gezeigt, der numerisch bestimmt wurde.

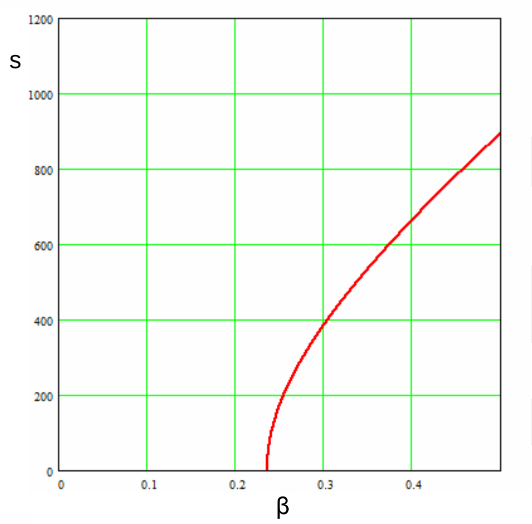

Abb.9: sprunghaftes Einsetzen eines Umwegs, beschrieben durch s, ab einem kritischen Steigungswinkel β_c

Durch Entwicklung nach kleinen s findet man die Beziehung $s \sim (h - h_c)^{\frac{1}{2}}$. Dies ist ganz analog zur Mean-Field Theorie für Phasenübergänge (s spielt dabei die Rolle des Ordnungsparameters, h_c die Rolle der Temperatur). Dies zeigt auch die Abbildung 10, die die zu minimierende Zeit (in der statistischen Physik wäre es die freie Energie) für zwei verschiedene Steigungen zeigt. Während für kleinere Steigungen das Minimum von T bei $s = 0$ liegt, ist für größere Steigungen die kleinste Gehzeit mit dem "Umweg" $s > 0$ verbunden.

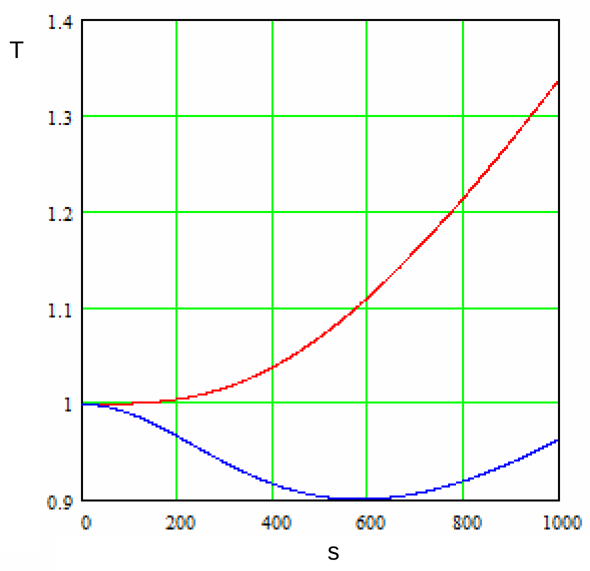

Abb.10: Gehzeit für 2 verschiedene Steigungen. Rot unterhalb der kritischen Steigung mit dem Minimum bei s = 0, und blau über der kritischen Steigung mit einem s ~ 500m, was einer Verlängerung des Wegs von L = 1000m auf ca. L' = 1400m bedeutet.

Der kritische Winkel $\beta_c = \arcsin(h_c/L)$, bei dem der Zick-Zack Übergang stattfindet, ist für die Gehzeitformel (9) exakt berechenbar und gegeben durch:

$$\sin(\beta_c) = \frac{h_c}{L} = \sqrt{\frac{1}{a + mg\sqrt{\frac{a}{\lambda P_{opt}}}}} \quad (17)$$

Wie zu erwarten verschwindet der Übergang für a gegen Null, da dann der Wirkungsgrad gegen Eins geht und nicht mehr von der Kraft abhängt. Interessant ist die relativ schwache Abhängigkeit von P_{opt} (siehe Abbildung 11). In einem großen Bereich 100W < P_{opt} < 300W variiert der Zick-Zack nur wenig und liegt zwischen 13 und 16 Grad.

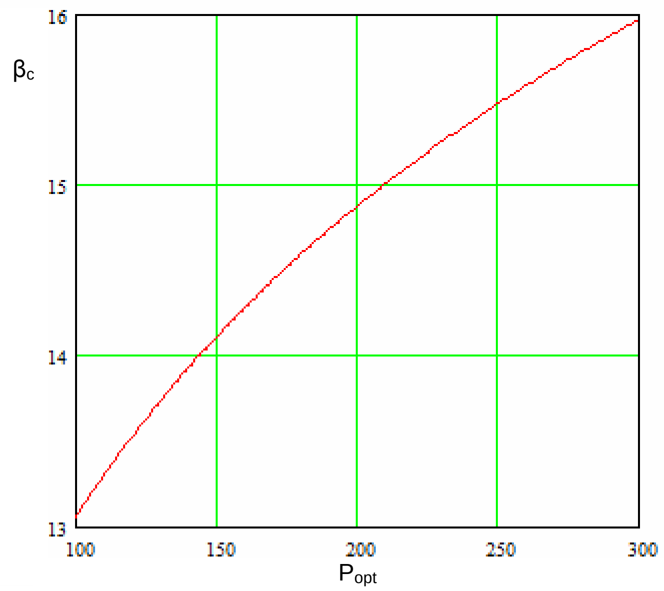

Abb.11: kritischer Steigungswinkel (17) in Grad als Funktion des Leistungsparameters P_{opt}.

In der Schweizer Formel findet der Zick-Zack Übergang bei einem Winkel von 13.8° statt, was einer Steigung von 24.6% entspricht. Der Übergang von DHN liegt bei 15.4°.

Es ist noch wichtig zu erwähnen, dass die Schweizer Formel beim Bergabgehen keinen Zick-Zack Übergang zeigt. Gehzeiten, die praktisch linear in der Steigung sind, was auch für die Naismith Regel (11) gilt, haben keinen Zick-Zack Übergang.

Schluss

In dieser Arbeit wurde eine Gleichung für die Anstiegszeiten beim Berggehen aufgestellt, basierend auf einfachen Prinzipien wie der Energieerhaltung und mit einem von der Schwerkraft abhängigen Wirkungsgrad, der aus dem Hill'schen Muskelmodell abgeleitet wurde. Mechanische Modelle à la "inverted pendulum", auf Steigungen verallgemeinert, können die beobachteten Zeiten nicht erklären, sie liefern zu kleine Steigungsbeiträge für die Gehzeit.

Das Modell gibt alle wichtigen physikalischen Grenzfälle wieder. Die Gleichung für die Gehzeit wurde mit mehreren deskriptiven Ansätzen, die aus Messungen hervorgehen, erfolgreich verglichen und die dazu benötigten Leistungsparameter sind plausibel mit Wattzahlen zwischen 100 und 150. Wie zu erwarten, hängt die Gehzeit T nicht nur von der Steigung ab, sondern wird wesentlich bestimmt von den individuellen Berggeher-eigenschaften P_{opt}/m und F_{max}/m (siehe Abbildung 4).

Das Modell zeigt einen Zick-Zack Übergang, dessen kritischer Steigungswinkel nur wenig von der zu Verfügung stehenden Leistung abhängt und zwischen 13 und 16 Grad liegt.

Referenzen

[1] http://www.zeit.de/2012/30/Wanderweg-Zeitberechnung

[2] DIE ZEIT Nr.32, Seite 30, „Wann sind wir wirklich da?“

[3] F.K.Kromer Excel-Berechnungstool - *Schweizer Wanderwege*

[4] H.J.Ralston, Energy-speed relation and optimal speed during level walking, Int. T. angew. Physiol., Bd. 17, S.277-283 (1958)

[5] C.Davis, The Energy Cost of Walking, http://www.idlex.freeserve.co.uk/idle/evolution/human/early/walking.html

[6] A.V.Hill, The maximum work and mechanical efficiency of human muscles, and theirmost economical speed, J Physiol. 56 (1922) , 19–41

[7] A.V.Hill, The Heat of Shortening and the Dynamic Constants of Muscle, *Proc. R. Soc. Lond. B* 1938 **126**, 136-195

[8] A.McCulloch, muscle mechanics, http://www.continuity.ucsd.edu/Courses/be112b/Topics?action=AttachFile&do=get&target=be112aTopic15_musclemechanics.ppt

[9] R.C.Davey, M.Hayes, J.M.Norman, Running uphill: an experimental result and its applications, J. Opl. Res. Soc. 45, 25-29 (1994)

[10] A.Kay, Route Choice in Hilly Terrain, http://www.lboro.ac.uk/microsites/maths/research/preprints/papers10/10-10.pdf

[11] M.Llobera, T.J.Sluckin, Zigzagging: Theoretical insights on climbing strategies, Journal of Theoretical Biology **249** ,206-217 (2007)

