Über die Hilflosigkeit eines frei hängenden Kletterers
oder
die Unmöglichkeit sich am langen Seil in Schwingungen zu versetzen

Dezember 2019

Ulrich Leuthäusser

„Wahnsinn ist, immer wieder das Gleiche zu tun und andere Ergebnisse zu erwarten." Albert Einstein

Einleitung

Es passierte in einem abgelegenen Teil der Verdonschlucht. Der Autor seilte dort über einen steilen Wandteil ab. Der laut Topo vorgesehene nächste Abseilstand war ihm zu nah und er beschloss zum übernächsten, etwa 40 Meter weit weg, abzuseilen. Die Seile hingen zwar im Freien, aber nicht so weit, so dass ihm das Anpendeln an diesen Stand nicht nötig erschien – so steil war's auch wieder nicht. Auf der Höhe dieser Abseilstelle angelangt, war er etwa 1,5 Meter von der Wand entfernt. Das ist nicht viel und unter zur Hilfenahme seiner Beine war er sich sicher, dass er durch eine kleine Pendelschwingung vom Seil die Wand erreichen würde. Sowohl vom Beobachten wiederholter hilfloser Versuche anderer Kletterer als auch von eigenen ergebnislosen Bemühungen im Klettergarten war ihm bewusst, dass es schwer ist, sich in Schwingungen mit einer größeren Amplitude am freihängenden Seil zu versetzen. Die neue Erfahrung war, dass so gut wie keine Schwingung anzuregen war, um die nötigen wenigen Zentimeter zu den Ketten des Abseilstands zu erreichen.
Es ist bekannt, dass es im Sitzen auf einer Kinderschaukel ohne weiteres möglich ist, sich selbst aus der Ruheposition in Schwingung zu versetzen ohne angestoßen zu werden. Somit stellt sich die Frage, wieso man in dem geschilderten Fall wie ein „jambon dans le vide" hilflos im Freien hing. Hätte eine bestimmte Art zu pendeln zum Erfolg geführt, war es also einfach nur Ungeschick oder ist es prinzipiell nicht möglich sich in Schwingungen zu versetzen?

Im Folgenden soll diese Frage beantwortet werden.
Aus Sicht der Physik ist der an einem Seil frei hängende Kletterer ein spezielles elastisches Doppelpendel. Dieses ist zwar konzeptionell einfach, führt aber höchst komplizierte Bewegungen bei größeren Amplituden aus und ist ein häufig benutztes Beispiel für ein chaotisches System. Die Bewegungsgleichungen werden im Anhang aufgestellt und in ihrer linearen Form im Hauptteil genauer diskutiert. Welche Rolle spielt dabei die Elastizität des Seils? Regt man möglicherweise eher elastische Longitudinalschwingungen an anstatt die gewünschte Pendelbewegung?

Abb.: Eine der verrücktesten Abseilstellen in der Verdonschlucht.
Ohne Anpendeln des zweiten Abseilstands hängt man schließlich einige Meter von der Wand weg und ist noch 70 m über dem Boden. Die Frage ist, ob man aus eigener Kraft, indem man das Seil in Pendelschwingungen versetzt, wieder an die Wand kommt.

Ein spezielles elastisches Doppelpendel

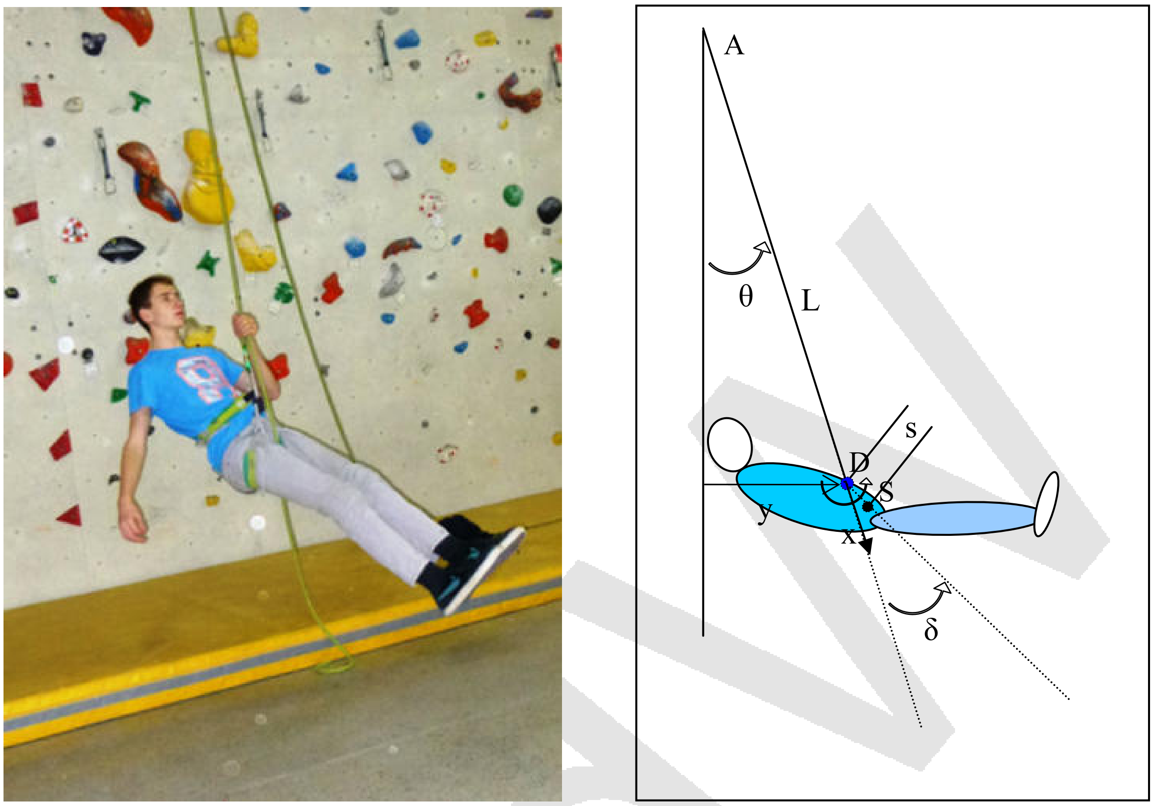

Abb.1a,b: Modellierung des freihängenden Kletterers als elastisches Doppelpendel.

Das erste Pendel des elastischen Doppelpendels stellt das Seil dar. Es kann sich um seine Aufhängung A (siehe Abb.1) mit dem Winkel θ drehen und ist in Längsrichtung elastisch dehnbar. Es hat eine ungedehnte Länge L, die Federkonstante k und wird als masselos angenommen. Das Seil ist im Punkt D mit dem zweiten Pendel, dem Kletterer K, verbunden. Er hat die Masse M und das Trägheitsmoment J um eine Achse senkrecht zur Bildebene durch seinen Schwerpunkt S. K wird als starrer Körper angenommen, obwohl K seine Hüfte und die Unterschenkel bewegt um sich drehen zu können. Die Drehung um D wird durch den Winkel δ relativ zum ersten Pendel beschrieben, da die Bewegungen von K unabhängig von θ sind. Der Drehpunkt D fällt im Allgemeinen nicht mit S zusammen und der Abstand zwischen D und S ist s.

Ein ähnliches Doppelpendel findet sich in der Arbeit von W.Case and M.Swanson [1]. Dort wird die Schwingungsanregung mit einer Schaukel diskutiert und die schaukelnde Person als starre Hantel modelliert. Dabei liegt der Schwerpunkt des Schaukelnden oberhalb vom Drehpunkt im Gegensatz zur Aufhängung mit einem Klettergurt. Weitere Arbeiten zur Schwingungsanregung einer Schaukel sind [2], [3] und [4]. [2] untersucht die stehende Position auf einer Schaukel, [3] verzichtet auf den mathematischen Apparat der analytischen Mechanik und [4] ist eine experimentelle Arbeit (verwendete Schaukellänge L~1.75m).

Die eleganteste Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für dieses mechanische System ist der Lagrange-Formalismus. Dazu benötigt man die Lagrangefunktion, die sich relativ leicht aus geometrischen Überlegungen ergibt.
Diese Rechungen sind im Anhang zu finden, zusammen mit den resultierenden Bewegungsgleichungen für die zeitliche Entwicklung des Winkels θ und der radiale

Seilschwingung mit der Auslenkung x. In allgemeiner Form können diese gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen nur numerisch behandelt werden. Da wir aber nur an kleinen Winkeln θ interessiert sind, können wir sie in einer vereinfachten Form diskutieren.

Man erhält diese aus Gleichung (A.3), wenn auch δ linearisiert wird

$$(M(L+s)^2 + J)\ddot{\theta} + Mg(L+s)\theta = -(J + Ms(L+s))\ddot{\delta} - Msg\delta \tag{1}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht die treibende Kraft, die durch das periodische Vor – und Zurückschwingen von K (mediolateral) um den Punkt D mit Winkel δ entsteht. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Aufgabenstellung in der Mechanik mit zwei Freiheitsgraden für das Doppelpendel, wo sowohl θ als auch δ einer Bewegungsgleichung genügen, gibt es hier nur einen Freiheitsgrad, weil δ eine „äußere" Variable ist, über die K verfügt.
In der genäherten Gleichung (1) kommt x nicht vor, die Bewegung von θ ist also vollständig von der elastischen Schwingung x entkoppelt. Da für die Pendellänge L>>s und für das Trägheitsmoment um S $ML^2 >> J$ gilt, lässt sich Gleichung (1) noch etwas vereinfachen:

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2\theta = -\left(\frac{J}{ML^2} + \frac{s}{L}\right)\ddot{\delta} - \frac{sg}{L^2}\delta \tag{2}$$

Diese Gleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator mit der Eigenfrequenz $\omega_1 = \sqrt{g/L}$ und mit einer zeitabhängigen treibenden Kraft auf der rechten Seite der Gleichung. Ein Antrieb aus der Ruhe ist auch für s=0 möglich, also selbst wenn der Drehpunkt im Schwerpunkt liegt (siehe Abb.2).

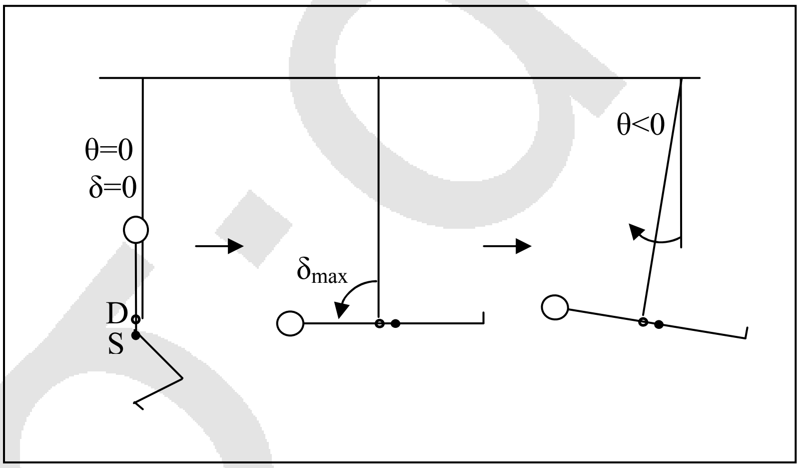

Abb.2: Drehimpulserhaltung. Aus der Anfangsposition δ(0)=0, θ(0)=0 wird durch das Rückwärtslehnen von K ein Drehimpuls erzeugt. Anfangs ist der Drehimpuls erhalten, d.h. $\left(ML^2\dot{\theta} + J\dot{\delta}\right) = 0$, deshalb bewegt sich das Pendel zunächst in die andere Drehrichtung.

Die Anregung ist zwangsläufig periodisch und da ein negatives δ nicht möglich ist, weil diese Bewegung vom Seil blockiert wird, variiert δ zwischen Null und einem maximalen δ_{max}

$$\delta(t) = \frac{\delta_{max}}{2}(1 - \cos(\Omega t)) \tag{3}$$

Es gilt $\delta(0)=0$, d.h. man beginnt in der aufrechten, sitzenden Position aus der Ruhelage θ(0)=0. Würde man $\delta \sim \cos(\Omega t)$ wählen, dann ist bei der Frequenz $\sqrt{sg/(J/M+sL)}$, die nahe an der Eigenfrequenz von K liegt, überhaupt keine treibende Kraft vorhanden, weil die rechte Seite von (2) Null ist. Fängt man also fälschlicherweise aus der horizontalen, liegenden Position (δ(0)=90°, θ=0) dann wird man sich überhaupt nicht bewegen.

Mit δ(t) aus Gleichung (3) erhält man als Lösung der Gleichung (2) den zeitlichen Verlauf des Winkels θ(t) um den das Seil ausgelenkt wird:

$$\theta(t)=\frac{\delta_{max}}{2}\left[\left(\frac{J}{ML^2}+\frac{s}{L}\right)\Omega^2\left(\frac{\cos(\omega t)-\cos(\Omega t)}{\omega^2-\Omega^2}\right)-\frac{sg}{L^2\omega^2}\left(1+\frac{\Omega^2\cos(\omega t)-\omega^2\cos(\Omega t)}{\omega^2-\Omega^2}\right)\right] \qquad (4)$$

Im Resonanzfall $\Omega=\omega_1$ ergibt sich daraus

$$\theta(t)=-\frac{J}{2ML^2}\frac{\delta_{max}}{2}\Omega\sin(\Omega t)\cdot t \qquad (5)$$

Die Amplitude wächst also linear mit der Zeit an und ist unabhängig von s. Die Rate $\dot{\theta}(t)$, mit der θ(t) anwächst, hat eine starke L-Abhängigkeit $\propto L^{-5/2}$.

Durch Vergleich von θ(t) mit der Anregungsfunktion δ(t) wird ersichtlich, wie K sich bewegen muss um die Pendelschwingung anzuregen (siehe Abb.3).

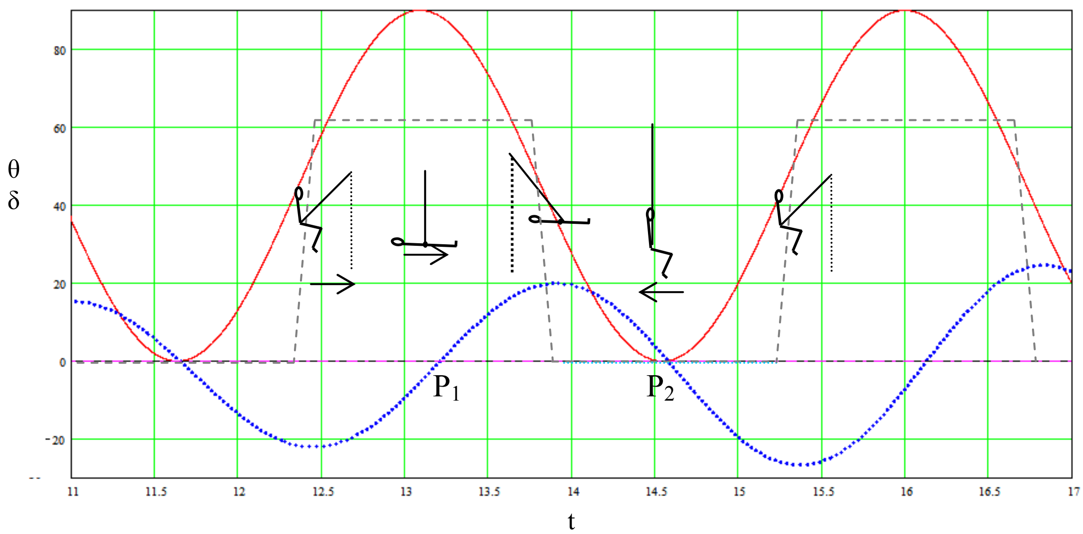

Abb.3: δ ist in rot als Funktion der Zeit t aufgetragen, wobei sein Maximum δ_{max}=90° der „liegenden" Position von K entspricht. Die blaue Kurve beschreibt θ(t) als Antwort auf die Zwangskraft F(δ(t)) im Resonanzfall. P1 und P2 sind die Nulldurchgänge von θ(t). Bei der Vorwärtsbewegung am niedrigsten Punkt P1 ist K in einer liegenden, horizontalen Position. Beim Zurückschwingen ist K am Punkt P2 in der sitzenden, aufrechten Position. Man kann zeigen, dass nur beim Rückwärtsschwingen ein Energieübertrag auf θ stattfindet.

Eine Rechteckschwingung, als 2π-periodische Funktion $\delta(t)=\delta(t+2\pi/\Omega)$ liefert bei gleicher Amplitude der Grundschwingung das gleiche θ(t), da alle höheren Harmonischen, aus denen sich diese Schwingung zusammensetzt, im Resonanzfall keinen Beitrag liefern.

Trifft man die Resonanzfrequenz nicht, dann kommt man schnell in den Grenzfall einer von L unabhängigen kleinen konstanten horizontalen Auslenkung $y_{max} = L\theta_{max} = 2s\delta_{max}$, also nur etwa 40cm für s=15cm.

Fasst man K als physikalisches Pendel auf, ist seine Eigenfrequenz $\Omega_K = \sqrt{Mgs/J_D}$. $J_D = J + Ms^2$ ist dabei das Trägheitsmoment um D. J_D/Ms wird oft als reduzierte Pendellänge L_r bezeichnet, als Länge des entsprechenden mathematischen Pendels mit der gleichen Schwingungsdauer wie K.
Aus der Literatur erhält man $J \approx 12\text{kgm}^2$ für eine Körpermasse M=70kg. K erzeugt die Auslenkung δ vor allem mit der Bewegung der Hüfte indem er die Beine von der gestreckten Position in eine 90°-Position hebt und wird so selbst zum Doppelpendel. Unterstützend wirkt dabei die synchrone Bewegung seiner Unterschenkel.
Ω_K lässt sich von K besonders leicht anregen. Ω_K wiederum muss zur Erzeugung einer relevanten Seilschwingung in Resonanz mit der Eigenfrequenz $\sqrt{g/L}$ des Seils sein.
Diese Seillänge L ist die reduzierte Pendellänge L_r von K. Mit dem obigen J und einem s = 0.15m erhält man $\Omega_K \approx 2.6\,\text{sec}^{-1}$ und $L = L_r \approx 1.5\text{m}$. Für so kurze L ist es ein Leichtes sich in Schwingung zu versetzen.
Um für größere Seillängen ins Pendeln zu kommen, muss K sich mit einer niedrigeren Frequenz als seiner Eigenfrequenz bewegen. Dies ist nicht leicht, aber mit etwas Geschick möglich. K muss nur die erwähnte Rechteckschwingung konsequent und im richtigen Takt durchführen. Kinder auf der Schaukel tun das problemlos. K hat aber dabei das Problem, dass er, aus der Ruheposition startend, die Eigenfrequenz des Seils nicht kennt und typischerweise zu schnell ist, weil er am liebsten mit seiner Eigenfrequenz Ω_K schwingt.
Angenommen K hat ein gutes Takt-Gefühl und er trifft die Eigenfrequenz des Seils, dann ist eine Schwingungsanregung möglich. Aber durch die geringe zeitliche Zunahme der Seilamplitude für etwas größere L ist viel Geduld nötig (siehe Abb.4) und man macht bei den vielen Wiederholungen zwangsläufig Fehler, die das Aufschaukeln erschweren.

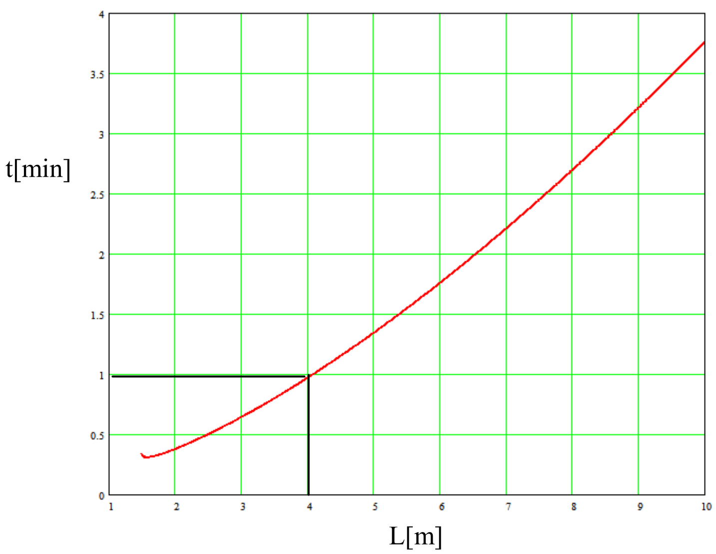

Abb.4: Löst man Gleichung (5) nach t auf, kann man die benötigte Zeit t als Funktion von L für ein bestimmtes y_{max} berechnen. Für L=4m mit y_{max}=1.5m benötigt man bereits eine Minute.

Hinzu kommen andere Hindernisse. Bislang sind Reibung und die Anregung anderer Schwingungsmoden nicht berücksichtigt worden.
Zunächst reibt das Seil an seiner Aufhängung und dämpft die Schwingung. Wenn man eine etwas größere Amplitude erreicht hat, dann ist die Geschwindigkeit von K schon nicht mehr vernachlässigbar und man muss sowohl die Luftreibung des Seils als auch die von K berücksichtigen.
Fügt man der Bewegungsgleichung (2) auf der linken Seite einen Dämpfungsterm $\gamma\dot{\theta}$ hinzu, dann erhält man im Resonanzfall eine maximale Auslenkung (siehe y_{max} in Abb.1b)

$$y_{max} = L\sin(\theta_{max}) \approx \frac{J}{ML}\frac{\delta_{max}}{2}Q \tag{6}$$

Dabei ist der Gütefaktor Q gegeben durch $Q = \Omega/\gamma$. Q/2π gibt die Anzahl der Schwingungszyklen an bis die Amplitude auf 1/e abgefallen ist. y_{max} ist ungefähr nach der Zeit $1/\gamma = Q\sqrt{L/g}$ erreicht.
Q lässt sich leicht experimentell abschätzen. Es ergeben sich ziemlich große Q mit Werten zwischen 50 und 100. Die Schwingung ist also nur schwach gedämpft. Wenn man von einem Gütefaktor Q =75 ausgeht, erhält man bei einem L=5m immerhin noch einen theoretisches y_{max}~1.5m. Aber y_{max} geht mit 1/L gegen Null. Selbst kleine Reibungsverluste verhindern also ein Aufschaukeln auf größere Auslenkungen.
Wenn K nicht aufpasst, kann er leicht die Rotation um die Hauptachse senkrecht zu seiner mediolateralen Schwingungsachse anregen, die zu einer Torsion im Seil führt und die die korrekte Ausführung der Rechteckschwingung erschwert. Aufgrund des kleinen Torsionsrückstellmoments ist diese Rotationsbewegung niederfrequent und leicht anzuregen.

Eine weitere Störungsquelle sind die longitudinalen elastischen Seilschwingungen.
Diese Auslenkungen x werden im linearen Fall durch die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_2^2 x = g + s\left(\ddot{\delta}\sin(\delta) + \dot{\delta}^2\cos(\delta)\right) \tag{7}$$

beschrieben mit $\omega_2 = \sqrt{k/M}$ (siehe Anhang). Wie die Bewegung von θ ist dies eine harmonische Schwingung und wie Gleichung (2) von der anderen Koordinate entkoppelt ist. Allerdings ist hier die anregende Kraft von s abhängig. Fällt der Drehpunkt D mit dem Schwerpunkt S von K zusammen, kann x also nicht angeregt werden. Die Lösung für x findet man im Anhang (Gleichung (A.7)). In der nichtlinearen Kraft in Gleichung (7) kommt neben Ω auch die doppelte Frequenz 2Ω vor, so dass es zwei Resonanzfrequenzen gibt. Für den Fall mit der Frequenz $2\Omega = \omega_2$ erhält man

$$x(t) \cong s\frac{\delta_{max}^2\Omega}{16}t\cdot\sin(2\Omega t) \tag{8}$$

Im Unterschied zu θ(t), ist x(t) vom Quadrat δ_{max}^2 abhängig.
ω_2 lässt sich für ein Kletterseil leicht aus seiner statischen Elongation ε_n, die unter UIAA-Normbedingungen gemessen wurde, bestimmen. Zunächst kann man mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes $M_n g = k_n L_n \varepsilon_n$ das Norm-ω_{2n} bestimmen. Mit den Normwerten für die Masse $M_n = 80$kg, die Seillänge $L_n = 2.6$m und $\varepsilon_n = 8.5\%$ (gemittelt über mehrere verschiedene Einfachseile) erhält man $\omega_{2n} = 6.66\,\text{sec}^{-1}$. Dieses aus einer statischen Messung gewonnene ω_{2n} ist deutlich kleiner als die „dynamische" Kreisfrequenz, die für

die Stärke des Fangstosses verantwortlich ist [5]. Die Verallgemeinerung des Norm-$\overline{\omega}_2$ auf verschiedene M und L ergibt:

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{2n}^2 M_n L_n}{ML} \tag{9}$$

Vergleicht man nun die Frequenzen Ω und 2Ω mit den Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des Seils als Funktion seiner ausgegebenen Länge ergibt sich folgende Situation, die in der nächsten Abbildung dargestellt ist.

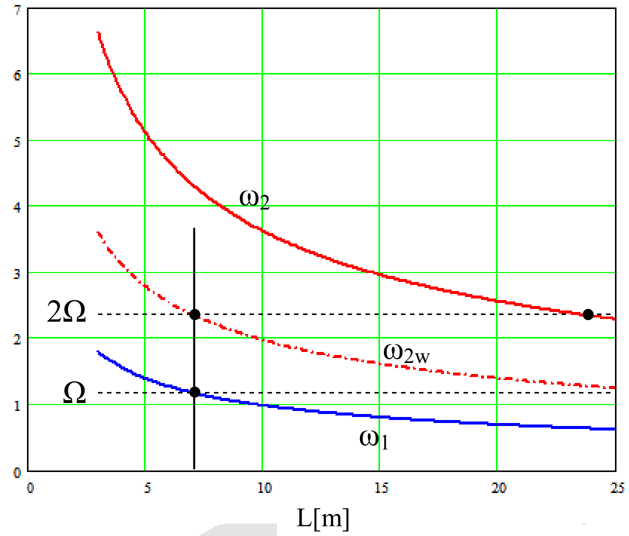

Abb.5: Die Eigenfrequenzen ω_1[sec^{-1}] (blau) und ω_2[sec^{-1}] (rot, durchgezogen) als Funktion von L. Um die Pendelschwingung Anzuregen, muss Ω = ω1 gewählt werden. Für L=7m beträgt Ω ≈1.2sec^{-1}. Da in der von K erzeugten Kraft die Frequenz 2Ω vorkommt, ist die Resonanz mit ω_2 weit entfernt (L ≈24m).
Bei „weichen" (Halb-)Seilen ist ω_{2w} die rot gestrichelte Kurve.
In diesem Fall werden beide Schwingungen gleichzeitig angeregt.

Für größere L ist es leicht möglich, die elastische Schwingung anstatt die erwünschte Pendelschwingung ω_1 anzuregen. Bei weichen Halbseilen mit deutlich kleineren ω_2, ist es möglich, dass beide Schwingungsmoden gleichzeitig angeregt werden.

Beim Überschlagschaukeln auf Jahrmärkten und beim Sportschaukeln wird der Schwung aus dem Wechsel zwischen einer stehenden und gehockten Position erzeugt. Dabei wird die Pendellänge periodisch geändert, was als parametrische Resonanz bezeichnet wird, weil sich ein Parameter der Schwingungsgleichung (also die Pendellänge) periodisch verändert. Dies unterscheidet sich von dem diskutierten Oszillator, der von einer autonomen Kraft angetrieben wird.
Da sich für s≠0 der Schwerpunkt von K periodisch auf und ab bewegt, ist es nicht verwunderlich, dass dieser parametrische Anregungsmechanismus auch bei dem elastischen Doppelpendel in der allgemeinen Bewegungsgleichung (A.3) vorhanden ist.

Es sind die Kopplungsterme der Form $\delta^2\ddot{\theta}$, $\delta\dot{\delta}\dot{\theta}$ und $\delta^2\theta$ (siehe (A.4), nach kleinen δ entwickelt), die zeitabhängige Funktionen mit θ bzw. seinen Ableitungen miteinander verknüpfen. Diese Terme sind in der Ruhelage alle Null und daher kommt man mit Hilfe parametrischer Resonanz aus der Ruhelage nicht heraus. Für kleine θ sind die Kopplungsterme sehr klein und spielen für die Anregung der Schwingung aus der Ruhe keine Rolle.

δ taucht entweder quadratisch auf oder ist mit einer seiner Ableitungen multipliziert. Das führt bei periodischem δ zu Anregungsfunktionen mit der doppelten Frequenz (ähnlich wie bei der elastischen Anregung x), was wiederum zu ganz neuen Schaukelstrategien führt.

Zusammenfassung

Zusammenfassend ist festzustellen, dass eine Schwingungsanregung des freihängenden Kletterers aus der Ruhe prinzipiell möglich ist, aber wegen der sehr niedrigen Anregungsfrequenz eines längeren Seils, dies nur bei kurzen Seillängen L bis ca. 2.5 Meter relativ gut funktioniert.
Auf korrekte Weise schaukelt man, wenn man bei der Vorwärtsbewegung am niedrigsten Punkt eine liegende, horizontale Position und am Umkehrpunkt die aufrechte sitzende Position einnimmt und diese beim Zurückschwingen am niedrigsten Punkt beibehält. Andere Schwingungstechniken sind für die Anregung der Schwingung nicht möglich, weil der parametrische Anregungsmechanismus nur für große Amplituden ins Spiel kommt.
Generell muss die niedrige Resonanzfrequenz, die durch die Pendellänge L vorgegeben ist, genau eingehalten werden, was ein gutes Gefühl für das Zeitmaß der Schwingung erfordert. Und selbst wenn man dazu in der Lage ist, verhindern Reibungsverluste durch Pendelaufhängung und Luft größere Auslenkungen. Zudem nimmt die Pendelamplitude bei größeren L mit der Zeit nur sehr langsam zu, so dass viel Geduld nötig ist.
Nach einem kleineren Sturz unter einen Überhang hat man durchaus Chancen zurück an die Wand zu kommen, wenn man so schnell wie möglich versucht die noch vorhandene Schwingung durch die oben besprochene Schaukelstrategie zu verstärken und nicht abwartet bis die Schwingung abgeklungen ist.
Schon ab Seillängen von 5 Metern ist man jedoch aus Sicht des Autors chancenlos, aus der Ruhe auch nur einen Meter Auslenkung zu erreichen. Ambitionierte Leser sind hiermit aufgefordert (z.B. in der Kletterhalle) auszuprobieren, bis zu welchen Seillängen sie in der Lage sind, sich aus der Ruheposition in eine relevante Schwingung zu versetzen. Über eine Rückmeldung würde sich der Autor freuen.
Um nicht in die Situation des bewegungslosen, freien Hängens zu geraten, ist es also beim Abseilen, sobald es überhängend wird, nötig, durch Abstoßen der Beine vom Fels zu pendeln, Expressschlingen in hoffentlich vorhandene Haken einzuhängen und durch fortwährendes Abstoßen von der Wand in Schwingung zu bleiben. Wenn's trotzdem passiert ist, lohnt es sich nicht, immer wieder sinnlose Versuche zu starten und so Kraft zu vergeuden, es hilft nur noch prusiken (oder sich retten lassen).

Acknowledgement

Der Autor dankt Ira Leuthäusser für ihre kritischen Einwände und für viele hilfreiche Diskussionen.

Anhang

Die Lagrangefunktion $\tilde{L}$ [6] für das elastische Doppelpendel (siehe Abb.1b) ist gegeben durch

$\tilde{L}$ = kinetische Energie - potentielle Energie =

$$\frac{M}{2}\left(r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2\right)+\frac{1}{2}J_D\left(\dot{\theta}+\dot{\delta}\right)^2+Ms\left[r\dot{\theta}\left(\dot{\theta}+\dot{\delta}\right)\cos(\delta)-\dot{r}\left(\dot{\theta}+\dot{\delta}\right)\sin(\delta)+g\cos(\theta+\delta)\right]+ \\ Mgr\cos(\theta)-\frac{1}{2}k(r-L)^2 \qquad \text{(A.1)}$$

Dabei sind

r=L+x die Gesamtlänge des Seils, zusammengesetzt aus der ungedehnten Länge L und der Elongation x

M die Masse von K

$J_D = J + Ms^2$ das Trägheitsmoment um den Drehpunkt D

J das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt S

θ der Winkel, den das Seil mit der Senkrechten bildet

δ der Winkel zwischen K und Seil

s der Abstand vom Drehpunkt zum Schwerpunkt

k die Federkonstante des Seils.

Die Bewegungsgleichung für θ erhält man aus den Lagrangegleichungen [6] für diese Koordinate

$$(Mr^2+J_D+2Msr\cos(\delta))\ddot{\theta}+2Mr\dot{r}\dot{\theta}+2Ms\dot{r}\dot{\theta}\cos(\delta)-2Msr\dot{\theta}\sin(\delta)\dot{\delta}-Ms\ddot{r}\sin(\delta) \\ -Ms\dot{r}\cos(\delta)\dot{\delta}+Msg\sin(\theta+\delta)+Mrg\sin(\theta)=-J_D\ddot{\delta}-Msr\cos(\delta)\ddot{\delta}+Msr\sin(\delta)\dot{\delta}^2 \qquad \text{(A.2)}$$

Es gibt eine lineare Kopplung an die x-Koordinate durch den Term $Ms\dot{x}\cos(\delta)\dot{\delta}$.

Für $\dot{r}=0$ und kleine Winkel θ folgt aus (A.2)

$$(Mr^2+J_D+2MsL\cos(\delta))\ddot{\theta}-2MsL\dot{\theta}\sin(\delta)\dot{\delta}+Msg\theta\cos(\delta)+MLg\theta= \\ -Msg\sin(\delta)-J_D\ddot{\delta}-MsL\cos(\delta)\ddot{\delta}+Msr\sin(\delta)\dot{\delta}^2 \qquad \text{(A.3)}$$

Die Bewegungsgleichungen (A.2) und (A.3) werden durch die (holonome) Zwangsbedingung δ =f(t) eingeschränkt und sind Gleichungen für die Variable θ alleine mit zeitabhängigen von δ vorgegebenen Koeffizienten.
Die Terme von θ und seinen Ableitungen, die mit einer zeitabhängigen Funktion verknüpft sind, und damit für die parametrische Resonanz verantwortlich, lauten

$$2MsL\cos(\delta)\ddot{\theta},\ 2MsL\dot{\theta}\sin(\delta)\dot{\delta}\ \text{und}\ \ Msg\theta\cos(\delta) \tag{A.4}$$

Die Lagrangegleichung für x ist gegeben durch

$$M\ddot{x} - Ms(\ddot{\theta}+\ddot{\delta})\sin(\delta) - Ms(\dot{\theta}+\dot{\delta})^2\cos(\delta)\dot{\delta} - Mr\dot{\theta}^2 - Mg\cos(\theta) + kx = 0 \tag{A.5}$$

Für $\theta << \delta$ und bei Vernachlässigung aller quadratischen und höheren Terme in $\dot{\theta}$ und θ, erhält man

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = g + s\left(\ddot{\delta}\sin(\delta) + \dot{\delta}^2\cos(\delta)\right) \tag{A.6}$$

Ihre Lösung für g=0 lautet:

$$x(t) = \left(\frac{\delta_{max}}{2}\right)^2 s\cdot\Omega^2\left[\frac{\cos(2\Omega t)}{(2\Omega)^2-\omega_2^{\,2}} - \frac{\cos(\Omega t)}{\Omega^2-\omega_2^{\,2}} + \frac{3\Omega^2\cos(\omega_2 t)}{\left((2\Omega)^2-\omega_2^{\,2}\right)\left(\Omega^2-\omega_2^{\,2}\right)}\right] \tag{A.7}$$

wobei $\omega_2 = \sqrt{k/M}$. Die Pendelbewegung $\delta(t) = \frac{\delta_{max}}{2}(1-\cos(\Omega t))$ erzeugt eine nichtlineare Kraft in (A.6), die auch einen Term der doppelten Frequenz 2Ω enthält. Dies führt zu zwei Resonanzen, entweder $2\Omega = \omega_2$ oder $\Omega = \omega_2$.

Referenzen

[1] W.B.Case and M.A.Swanson, “The pumping of a swing from a seated position” Am.J.Phys. 58 (5) (1990)

[2] W.B.Case, “The pumping of a swing from the standing postion”, Am.J.Phys. 64 (3) (1996)

[3] S.Wirkus, R.Rand and A.Ruina, “How to pump a swing”, The College Math. J. 29,4 (1998)

[4] A.Post, G. de Groot, A. Daffertshofer and P.Beek, ”Pumping a playground swing” Motor Control 11 (2007)

[5] U.Leuthäusser, “The physics of a climbing rope under a heavy dynamic load”, Proc. Of the Institution of Mechanical Engineers Part P 231 (2) (2017)

[6] D. Morin, *Introduction to Classical Mechanics*, Cambridge University Press (2007)