

Theoretische Beschreibung von Discountzertifikaten und deren Iteration

Ulrich Leuthäusser

Version 2 (25.01.2013)

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten von Discountzertifikaten untersucht. Ausgehend von der Renditekurve eines Discountzertifikats werden mit dem Standardmodell für die Modellierung von Aktienkursen (geometrischer Random Walk, Black-Scholes Modell) alle wesentlichen Kennzahlen wie die mittlere Rendite, die Volatilität und die Wahrscheinlichkeiten für einen Verlust und für den maximalen Gewinn eines Discountzertifikats exakt berechnet. Es ergeben sich relativ einfache analytische Ausdrücke, die in Excel programmierbar sind und damit für die Anwendung zur Verfügung stehen.

Die obigen statistischen Größen, die zunächst noch von zwei Parametern abhängen, lassen sich durch Bestimmung des fairen Preises des Discountzertifikats auf eine Variable, den Cap, reduzieren, was die Diskussion der Ergebnisse stark vereinfacht.

Außerdem wird das Iterieren von Discountzertifikaten diskutiert. Es ergeben sich für Caps kleiner gleich dem Preis des Underlyings vollkommen andere, für große Wiederholungszahlen exakt bestimmbare Renditeverteilungen als die des Underlyings. Man setzt sich also einem anderen Zufallsprozeß aus, den man durch Wahl des Caps und der Laufzeit in einem gewissen Maß selbst bestimmen kann, um so unterschiedliche Rendite-Risikoprofile zu realisieren. Anwendungsbeispiele basierend auf den gewonnenen Ergebnissen sind bei [SigmaDeWe](http://www.SigmaDeWe.com) zu finden.

Folgende Bezeichnungen werden benutzt:

t_0	Betrachtungszeitpunkt
t_e	Laufzeitende des Discountzertifikats (D)
$t = t_e - t_0$	Restlaufzeit von D
$P(t_e) = P_e$	Preis des Basiswerts oder Underlyings (U) zum Laufzeitende
C	Cap
$P(t_0) = P_0$	Preis von U zum Betrachtungszeitpunkt
$K(t_0) = K_0$	Preis von D zum Betrachtungszeitpunkt
$K(t_e) = K_e$	Preis von D zum Laufzeitende
$\exp(r_0 t) - 1$	risikolose Rendite im Zeitraum t
$c = C / P_0$	Cap bezogen auf P_0
$k = K_0 / P_0$	Preis von D zum Zeitpunkt t_0 bezogen auf P_0
$k_e = K_e / P_0$	Preis von D zum Zeitpunkt t_e bezogen auf P_0
$R = P_e / P_0 - 1$	Rendite von U in der Zeit t

Die Renditekurve eines Discountzertifikats

Die Rendite R_D von D als Funktion der Rendite R von U ist gegeben:

$$R_D(R) + 1 = \begin{cases} \frac{1}{k}(1+R) & \text{wenn } R + 1 \leq c \\ \frac{c}{k} & \text{wenn } R + 1 > c \end{cases}$$

Es gilt immer $k \leq 1$, und wenn $c \leq 1$ ist, gilt sogar $k \leq c$.

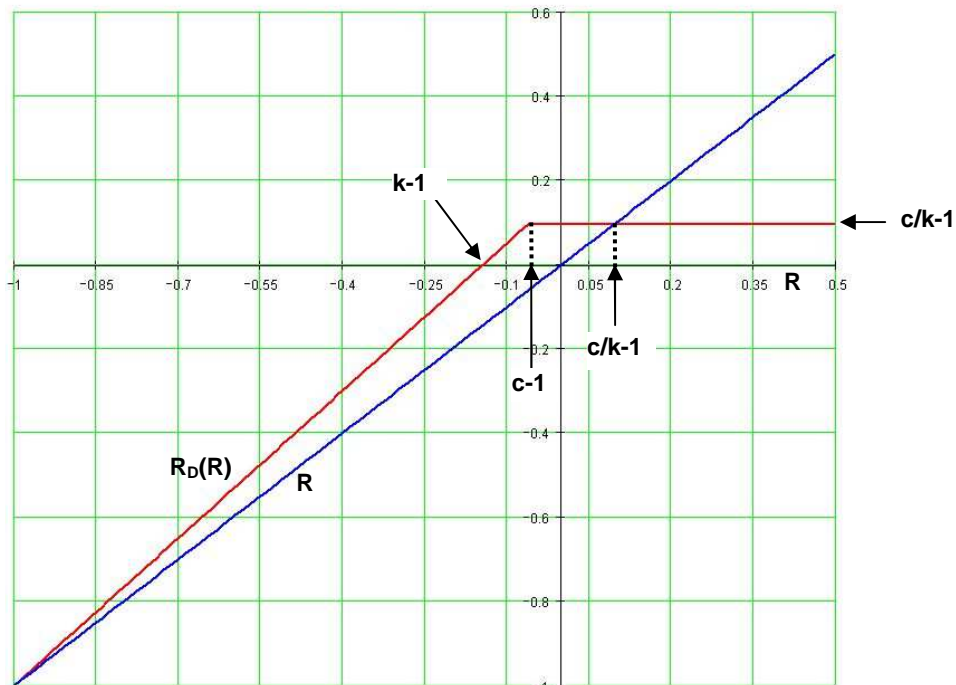


Abb. 1 Rendite eines Discountzertifikats (rot) und seines Underlyings (blau) als Funktion von R. Die zwei Parameter k und c bestimmen die Renditekurve vollständig.

Die maximale Rendite von D beträgt $R_D^{\max} = c/k - 1$. Für $R \geq R_D^{\max}$, also wenn der Preis P_e von U größer ist als $\frac{c}{k}P_0$, wäre der Kauf von U besser gewesen als der Kauf von D. $(c-1)$ ist der Abstand, um den U fallen kann, um gerade noch die maximale Rendite von D zu erhalten. Die Verlustzone wird erreicht, wenn $R_D(R) = 0$, d.h. wenn der Preis P_e von U zum Laufzeitende gleich dem Preis K_0 von D ist. Der Abstand $(1-k)$ wird manchmal als Discount bezeichnet.

Statistisches Verhalten eines Discountzertifikats

Um das statistische Verhalten von D zu bestimmen, muss eine Renditeverteilung von U angenommen werden.

In dieser Arbeit soll der Preis von U einem geometrischen Random Walk (RW) folgen (Black Scholes Modell¹). Dies ist das stochastische Standardmodell für den Zeitverlauf von Aktienkursen. Die stochastische Differentialgleichung dafür lautet:

$$dP(t) = P(t)[\mu \cdot dt + \sigma \cdot dW(t)]$$

mit μ als die erwartete Rendite pro Zeiteinheit (ZE), σ^2 die Varianz pro ZE und mit W als Wiener Prozess. Da für diesen die Autokovarianz $C(dW(t_1)dW(t_2))=0$ für $t_1 \neq t_2$ ist, sind die relativen Preisänderungen dP/P unabhängige Zufallsvariable, so dass $\log(P)$ einen Gaußschen RW beschreibt. Die Verteilung p_U der Preise von U nach der Laufzeit t ist deshalb lognormal und die Rendite R hat die Verteilung

$$p_U(R) = \ln N \left(1+R, (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \frac{1}{1+R} \exp \left[-\frac{(\ln(1+R) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)^2}{2\sigma^2 t} \right] \quad (1)$$

gültig für $R > -1$. Der Erwartungswert und die Varianz (= Volatilität²) der Rendite von U lauten

$$E(R) = \int_{-1}^{\infty} R \cdot p_U(R) dR = e^{\mu t} - 1 \approx \mu t$$

$$V(R) = \int_{-1}^{\infty} (R - E(R))^2 \cdot p_U(R) dR = (e^{\sigma^2 t} - 1)e^{2\mu t} \approx \sigma^2 t$$

(2a,b)

Die Renditeverteilung für D besteht aus zwei Teilen. Für $R_D < c/k-1$ erhält man einen kontinuierlichen Anteil bestehend erstens aus der Lognormalverteilung $\ln N$, mit Hilfe der Stufenfunktion H bei $c/k-1$ abgeschnitten, und zweitens aus einer Deltafunktion an der Stelle $R_D = c/k-1$

$$p_D(R_D) = p_U(R(R_D)) \left| \frac{dR}{dR_D} \right| \cdot H \left(\frac{c}{k} - 1 - R_D \right) + \int_{c-1}^{\infty} p_U(R) dR \cdot \delta \left(\frac{c}{k} - 1 - R_D \right) =$$

$$\ln N \left((1+R)k, (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma\sqrt{t} \right) \cdot k \cdot H \left(\frac{c}{k} - 1 - R_D \right) + P_{\max} \cdot \delta \left(\frac{c}{k} - 1 - R_D \right) \quad (3)$$

¹ F. Black, M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy. 81, 3 (1973)

P_{\max} ist dabei die Wahrscheinlichkeit, die maximale Rendite $c/k-1$ zu erhalten und gegeben durch

$$P_{\max} = \int_{c-1}^{\infty} p_U(R) dR = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln \left(\frac{c}{e^{\mu t}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (4)$$

Mit Hilfe von $p_D(R_D)$ können der Erwartungswert und die Varianz von D exakt berechnet werden. Der Erwartungswert der Rendite $E(R_D)$ von D ist gegeben durch:

$$k \cdot E(R_D + 1) = \bar{k}_e = \frac{1}{2} e^{\mu t} \operatorname{erfc} \left(\frac{-\ln \left(\frac{c}{e^{\mu t}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) + \frac{1}{2} c \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln \left(\frac{c}{e^{\mu t}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (5a)$$

mit der komplementären Errorfunktion $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$. \bar{k}_e ist der Erwartungswert des Preises von D zur Zeit t_e .

Zur Bestimmung der Varianz benötigt man das zweite Moment, gegeben durch

$$k^2 \cdot E((R_D + 1)^2) = \frac{1}{2} e^{2\mu t + \sigma^2 t} \operatorname{erfc} \left(\frac{-\ln \left(\frac{c}{e^{\mu t}} \right) + \frac{3}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) + \frac{1}{2} c^2 \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln \left(\frac{c}{e^{\mu t}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (6)$$

Mit (5a) und (6) erhält man die Varianz der Discountzertifikat-Rendite

$$V(R_D) = E((R_D + 1)^2) - E(R_D + 1)^2 \quad (7)$$

Für Fragen zur Zusammensetzung eines Portfolios, das Discountzertifikate enthalten soll, ist der Korrelationskoeffizient ρ zwischen U und D von Bedeutung. ρ ist definiert als:

$$\rho = \frac{\int_{-1}^{\infty} R_D(R) \cdot R \cdot p_U(R) dR - E(R_D) \cdot E(R)}{\sqrt{V(R_D) \cdot V(R)}} \quad (8)$$

und lässt sich exakt berechnen.

Folgende wichtige Wahrscheinlichkeiten können ebenfalls exakt angegeben werden. Die Verlustwahrscheinlichkeit von U , d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt t die Rendite von U negativ ist, lautet

$$P_U^{\text{loss}} = \int_{-1}^0 p_U(R) dR = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right). \quad (9)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit D eine negative Rendite beim Kauf zum Preis $K_0 = kP_0$ zu erhalten, beträgt:

$$P_D^{\text{loss}} = \int_{-1}^{k-1} p_U(R) dR = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-\ln\left(\frac{k}{e^{\mu t}}\right) - \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (10)$$

was keine explizite Abhängigkeit von c hat. Für $k = 1$ erhält man Gleichung (9).

Berechnung des fairen Preises des Discountzertifikats bei gegebenem Cap C

Zur Bestimmung des fairen Preis von D, $k_f = K_{0f}/P_0$ wird der Erwartungswert $\bar{k}_e(c, e^{\mu t})$ (Gleichung 5a) betrachtet. Die Schreibweise $\bar{k}_e(c, e^{\mu t})$ bedeutet, dass D ein Cap c besitzt und U den Trend μ .

Zunächst wird der typische Ansatz der Optionspreistheorie verwendet. Damit folgt, dass der momentane Preis k_f von D nach einer Laufzeit t im present value - Sinn gleich seinem Erwartungswert \bar{k}_e sein muss, wenn U mit der Rendite r anwächst, d.h. es gilt

$$k_f = e^{-rt} \cdot \bar{k}_e(c, e^{rt}) \quad (12)$$

Da sich für große c das Discountzertifikat D wie sein Underlying U verhält und für kleine $c \ll 1$ wie eine risikolose Anlage, gilt

$$k_f = \begin{cases} ce^{-r_0 t} & \text{für } c \ll 1 \\ 1 & \text{für } c \rightarrow \infty \end{cases}$$

Diese Grenzfälle sind nur erfüllt, wenn r in (12) gleich r_0 gesetzt wird. Explizit erhält man dann mit Gleichung 5a für k_f

$$k_f = e^{-r_0 t} \bar{k}_e(c, e^{r_0 t}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-\ln(ce^{-r_0 t}) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) + \frac{1}{2} ce^{-r_0 t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\ln(ce^{-r_0 t}) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (13)$$

Nicht überraschend, hat k_f die Form eines Put-Preises von Black und Scholes.

Es ist bemerkenswert, dass der folgende zweite Ansatz quasi zu demselben Resultat führt. Setzt man die Sharpe Ratios $S_U = \frac{E(R) - (e^{r_0 t} - 1)}{\sqrt{V(R)}}$ und $S_D = \frac{E(R_D) - (e^{r_0 t} - 1)}{\sqrt{V(R_D)}}$ von U und D gleich, erhält man

$$E(R_D) - (e^{r_0 t} - 1) = (E(R) - (e^{r_0 t} - 1)) \sqrt{\frac{V(R_D)}{V(R)}}. \quad (14)$$






Das Sharpe Ratio als Risiko-Renditeverhältnis bringt zum Ausdruck, dass eine höhere Rendite zwangsläufig mit einer höheren Volatilität, also einem höheren Risiko, verknüpft ist. Da S_U aus historischen Daten gut bestimmt werden kann, liefert dies eine Beziehung für den fairen Preis von D relativ zu U. Das Gleichsetzen der Sharpe Ratios folgt auch sofort aus dem CAPM Modell², wenn man zwei Portfolioanteile durch Elimination des Marktportfolios in Beziehung setzt.

Setzt man die Gleichungen (5a), (6) und (7) in (14) ein, kann man diesen Ausdruck leicht nach k_f auflösen, so dass

$$k_f = e^{-r_0 t} \left(E(R_D + 1) \Big|_{k=1} - S_U \sqrt{V(R_D) \Big|_{k=1}} \right) \quad (15)$$

Beide k_f können verwendet werden, da sie praktisch gleiche Ergebnisse liefern (siehe untere Abbildung). Im Gegensatz zu k_f aus (13), zeigt jedoch das k_f aus (15) eine leichte μ Abhängigkeit für große μ .

Die Änderungen von k_f bei Änderung der verschiedenen Modellparameter μ , σ , t , c und r_0 sind in der folgenden Tabelle gezeigt.

	$c \uparrow$	$\sigma \uparrow$	$t \uparrow$	$\mu \uparrow$	$r_0 \uparrow$
k_f					

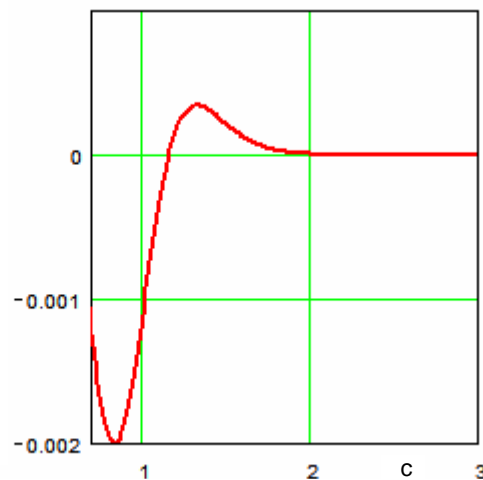


Abb. 2 Der relative Unterschied $\frac{k_f(\text{Gl.15})}{k_f(\text{Gl.13})} - 1$

² H.Levy, M.Sarnat, **Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice**, Prentice Hall (1984)

Es folgt eine Diskussion der theoretischen Ergebnisse für ein Discountzertifikat mit einem Cap $c = 0.9$ dem ein U mit $\mu_Y = 0.06$ und $\sigma_Y = 0.2$ zugrunde liegt. In der unteren Abbildung ist eine typische Renditeverteilung $p_D(R_D)$ im Vergleich mit der Renditeverteilung von U dargestellt.

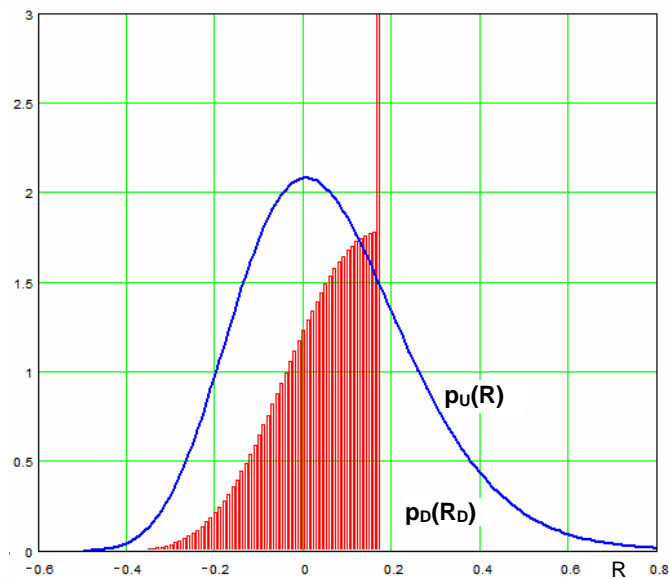


Abb. 3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Renditen nach einem Jahr von einem Discountzertifikat mit $c=0.9$ (rot) und seinem Underlying (blau) als Funktion der Rendite R . Die Jahresrendite von U (Gleichung 2a) ist 6%, die Jahresvolatilität von U (Gleichung 2b) beträgt 20%.

Die nächste Abbildung zeigt $E(R_D) / E(R)$, $\sqrt{V(R_D) / V(R)}$ und ρ als Funktion von c .

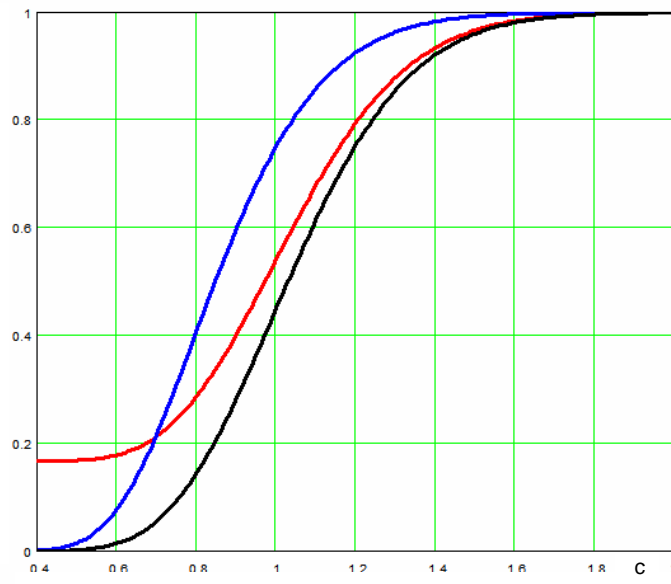


Abb. 4 Erwartete Rendite $E(R_D)$ (rot) und Volatilität $V(R_D)^{1/2}$ (schwarz) eines Discountzertifikats jeweils bezogen auf die entsprechenden Größen von U als Funktion von c . Außerdem ist in blau der Korrelationskoeffizient ρ zwischen Underlying und D als Funktion von c dargestellt.

Da abgesehen von der Laufzeit t der Cap die einzige Größe ist, über die verfügt werden kann, ist die obige Abbildung gut geeignet, um sich beim Kauf eines Discountzertifikats zu positionieren. Wählt man z.B. $c = 1$, dann reduziert man sein Risiko (gemessen mit Hilfe der Volatilität) um

etwa 60%, dementsprechend sinkt die mittlere Rendite um etwa 45%. Bei $c = 1$ ist die Korrelation zwischen D und U etwa 75%.

Es wird noch eine ausgezeichnete Näherung für $E(R_D)$, der mittleren Rendite von D , angegeben, an der man den Übergang von der risikolosen Rendite zur Rendite des Underlyings mittels der S-förmigen erfc-Funktion (deren Breite vor allem durch die Volatilität von U bestimmt wird) nachvollziehen kann:

$$E(R_D) \cong (e^{\mu t} - e^{r_0 t}) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(-\frac{\ln \left(\frac{c}{e^{\mu t}} \right)}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) + (e^{r_0 t} - 1) \quad (5b)$$

In der nächsten Abbildung 5 ist P_{\max} (Gleichung 4, rote Kurve), die Wahrscheinlichkeit, die maximale Rendite $R_D^{\max} = c/k_f - 1$ zu erhalten, zusammen mit R_D^{\max} (blaue Kurve) dargestellt. So erhält man bei $c = 1$, für $R_D^{\max} = 8.7\%$, aber nur mit $P_{\max} = 58.6\%$.

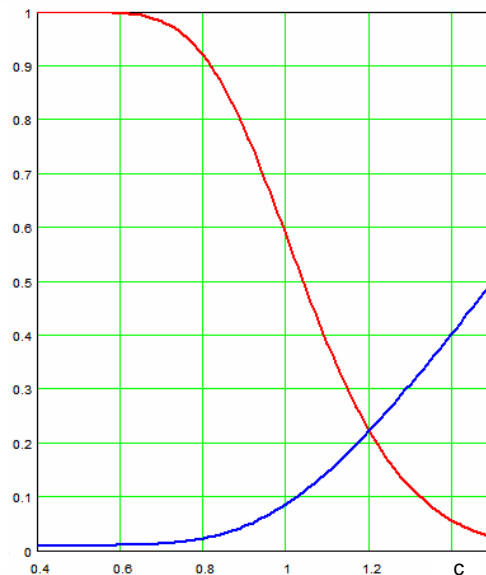


Abb.5 Wahrscheinlichkeit die maximale Rendite zu erhalten (rot) und maximale Rendite (blau) als Funktion von c

In der folgenden Abbildung 6 kann man die Reduktion der Verlustwahrscheinlichkeit P_D^{loss} (Gleichung 10) von D gegenüber U (Gleichung 9) ablesen. Für Caps c kleiner als 0.7 geht P_D^{loss} stark gegen Null. Man sollte aber immer beachten, dass der geometrische RW zwar ein gutes Modell für Aktienkurse darstellt, aber die oft diskutierte "fat tail" - Problematik³ nicht enthält.

³ B.Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance*, Springer (1997)

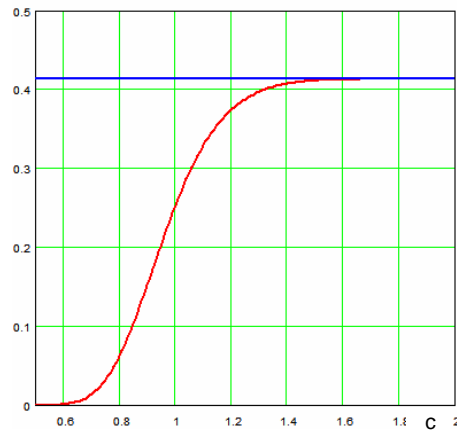


Abb.6 Verlustwahrscheinlichkeit von D (rot) und Verlustwahrscheinlichkeit des Underlyings (blau) als Funktion von c

Berechnung von Risikoparametern

Der analytische Ausdruck für k_f (13) ermöglicht es, die sog. Risikoparameter, ausgedrückt durch griechische Variable, einfach zu berechnen. Als Beispiel wird hier das Delta berechnet. Es gibt an, wie stark sich der Preis K_0 von D verändert, wenn sich der Underlyingkurs P_0 verändert. δ ist gegeben durch

$$\delta = \frac{\partial K_0}{\partial P_0} = k_f - c \frac{\partial k_f}{\partial c} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{-\ln \left(\frac{c}{e^{r_0 t}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (16)$$

was ein wohlbekannter Ausdruck aus der Optionspreistheorie⁴ ist.

Wie in der Abbildung 7 zu sehen ist, reagiert D auf Veränderungen von K_0 bei großen K_0 kaum, da D weit über dem Cap liegt. Für kleine K_0 jedoch, laufen Veränderungen von D nahezu parallel zu denen von U. Außerdem ist die Abhängigkeit von δ von der Restlaufzeit t gezeigt. Lange Restlaufzeiten führen zu deutlich flacher verlaufenden Deltas in Abhängigkeit von Preisänderungen von U.

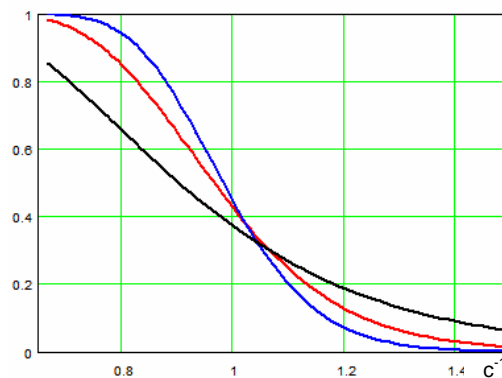


Abb.7 δ als Funktion von c^{-1} für $T = 0.5$ Jahre (blau), $T = 1$ Jahr (rot) und $T = 3$ Jahre (schwarz).

⁴ C. Casey, O. Loistl, C. Schneider, **Computergestützte Finanzierungsentscheidungen**, Service Fachverlag (1993)

Iteration von Discountzertifikaten

Wenn man über einen längeren Zeitraum hinweg nach einem abgelaufenen Discountzertifikat ein weiteres gleichartiges folgen lässt, ist es wichtig zu wissen, welche Renditeverteilung von n-fach iterierten Discountzertifikaten entsteht.

Während man für kleine Wiederholungszahlen n auf die numerische Analyse angewiesen ist, kann der Fall großer n analytisch durchgeführt werden.

Die Gesamtrendite D nach n Iterationen eines Discountzertifikats mit gleichem c beträgt

$$D + 1 = \prod_{i=1}^n (1 + R_D(i)) \quad (17)$$

Da die $R_D(i)$ identisch verteilt und statistisch unabhängig (i.i.d.) sind, erhält man, wenn man zu den logarithmierten Größen $y_i = \ln(1 + R_D(i))$ übergeht, eine Summe von i.i.d. Zufallsvariablen

$$\ln(1 + D) = \sum_{i=1}^n \ln(1 + R_D(i)) = \sum_{i=1}^n y_i = Y \quad (18)$$

Für große n gilt dann der zentrale Grenzwertsatz, der besagt, dass Y normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $nE(y_i)$ und der Varianz $nV(y_i)$:

$$Y \sim N(Y, nE(y_i), nV(y_i)) = N(Y, nE(\ln(1 + R_D(i))), nV(\ln(1 + R_D(i)))) \quad (19)$$

Ist $\ln(1 + R_D)$ normalverteilt, dann ist $1 + R_D$ lognormalverteilt:

$$1 + D \sim \ln N(1 + D, nE(\ln(1 + R_D(i))), nV(\ln(1 + R_D(i)))) \quad (20)$$

$E(\ln(1 + R_D(i)))$ und $V(\ln(1 + R_D(i))) = E(\ln(1 + R_D(i))^2) - E(\ln(1 + R_D(i)))^2$ können für die Verteilung von D (Gleichung 3) berechnet werden:

$$E(\ln(1 + R_D(i))) = -\frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{k}{e^{\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \operatorname{erfc} \left(-\frac{\ln\left(\frac{c}{e^{\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) - \sigma \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{c}{e^{\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{t\sigma^2}} \right)^2 \right) \quad (21)$$

$$+ P_{\max}(c) \ln\left(\frac{c}{k}\right)$$

$$E((\ln(1 + R_D(i)))^2) = \frac{1}{2} \left(\left(\ln\left(\frac{k}{e^{\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t \right)^2 + \sigma^2 t \right) \operatorname{erfc} \left(-\frac{\ln\left(\frac{c}{e^{\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{2t\sigma^2}} \right) \quad (22)$$

$$- \sigma \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \left(\ln\left(\frac{c e^{\mu t}}{k^2}\right) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{c}{e^{\mu t}}\right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t}{\sqrt{t\sigma^2}} \right)^2 \right) + P_{\max}(c) \left(\ln\left(\frac{c}{k}\right) \right)^2$$

In den folgenden Beispielen wird von einer Gesamtlaufzeit von 16 Jahren ausgegangen und es werden Discountzertifikate betrachtet, die eine Laufzeit von $\frac{1}{4}$ Jahr, $\frac{1}{2}$ Jahr, 1 Jahr, 2 Jahre und 4

Jahre haben. Dementsprechend variieren die Iterationszahlen von 4 bis 64. Der momentane Preis von U sei 1000. Als Preis des Discountzertifikats wird der faire Preis (Gleichung 13) genommen.

Im ersten Fall wird $c = 0.9$ gewählt.

Die deutlichen Unterschiede zwischen den verschiedenen D's und U sind sowohl in der folgenden Tabelle 1 wie auch in der Abbildung 8 zu sehen. Die breite Verteilung von U bedeutet, salopp gesagt, dass mit U eigentlich alles passieren kann, von sehr großen Gewinnen bis zu extremen Verlusten. Die Verteilungen von D sind viel schmäler mit einem deutlichen Peak und daher prinzipiell risikoärmer. Während man bei einem direkten Investment in das Underlying eine Verlustwahrscheinlichkeit von über 30% hat und immerhin noch mit ca. 9% Wahrscheinlichkeit mehr als die Hälfte seiner Anfangssumme verlieren kann, sind die entsprechenden Werte für D immer kleiner als 19% und extreme Verluste immer kleiner als 1.25%. Die wahrscheinlichste Rendite (Modus) ist beim Underlying negativ und beträgt -26%, für D hingegen liegt der Modus immer deutlich im positiven Bereich. Für $n = 4$ besteht sogar noch eine Wahrscheinlichkeit von über 20%, die maximal mögliche Rendite zu erhalten.

Nimmt man die Reibungskosten S pro Iteration hinzu, werden die Verteilungen näherungsweise um die Gesamtkosten $(1+S)^n - 1$ nach links verschoben. Für $S = 0.5\%$ werden D's mit großen Iterationszahlen vollkommen unattraktiv.

	U	D ₆₄	D ₃₂	D ₁₆	D ₈	D ₄
Iterationszahl n		64	32	16	8	4
t [in Tagen]		91	182	364	728	1456
R _{max}		0,9%	2,2%	4,5%	8,5%	15,2%
c		90,0%	90,0%	90,0%	90,0%	90,0%
Discount		-10,8%	-11,9%	-13,9%	-17,0%	-21,8%
E(R)		0,3%	0,8%	1,8%	3,8%	7,9%
V(R) ^{1/2}		2,0%	3,8%	6,3%	9,7%	14,1%
E(R) _Y	4,0%	1,4%	1,6%	1,8%	1,9%	1,9%
V(R) _Y ^{1/2}	20,0%	4,0%	5,4%	6,3%	6,9%	7,1%
E(R) _{16Y}	87,3%	24,4%	28,7%	32,2%	34,6%	35,7%
V(R) _{16Y} ^{1/2}	166,0%	20,0%	27,8%	33,4%	36,1%	35,9%
Prob(R<0) _{16Y}	32,9%	12,2%	16,3%	18,4%	19,1%	19,0%
Prob(R<-50%) _{16Y}	8,8%	0,0%	0,1%	0,3%	0,8%	1,2%
R _{max16Y}		77,7%	99,9%	102,9%	91,8%	75,8%
P _{max16Y}		1,0%	0,8%	1,0%	6,1%	23,3%
ρ		45,6%	52,7%	57,2%	56,2%	54,7%
Modus	-21,6%	~20%	~25%	~30%	~35%	~40%
fairer Preis		892	881	861	830	782

Tab. 1 Kennzahlen n-fach iterierter Discountzertifikate mit $c = 0.9$ zusammen mit ihrem Underlying

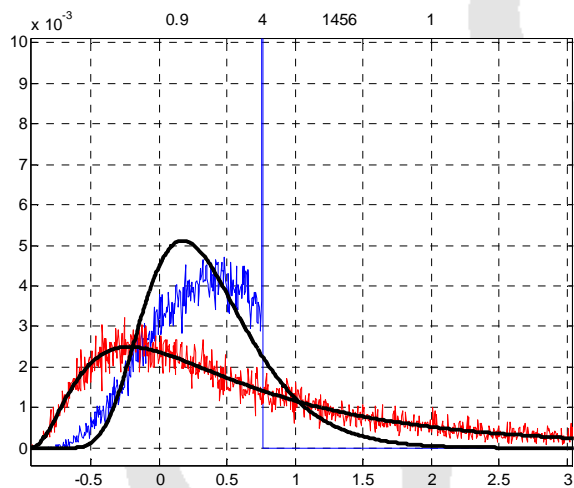
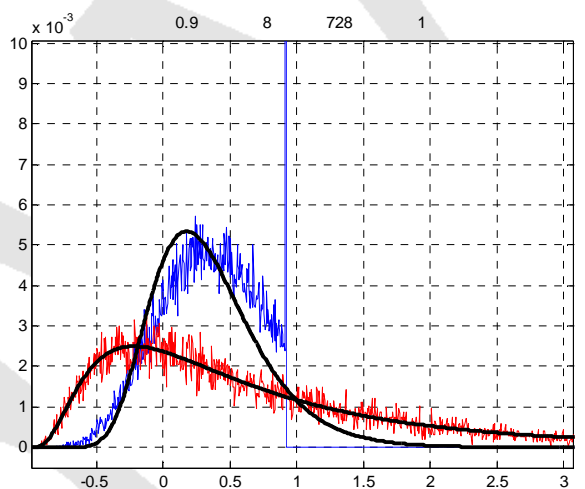
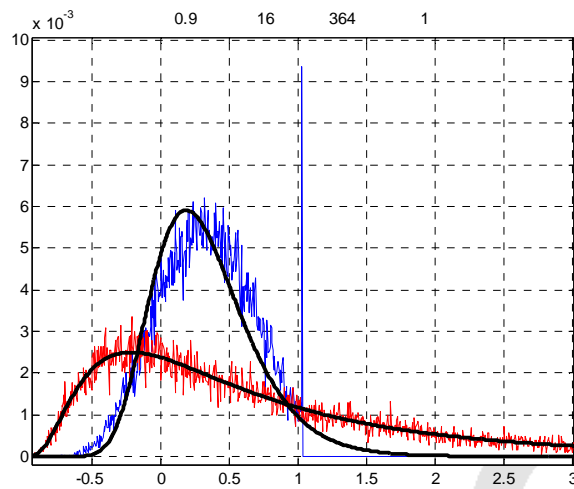
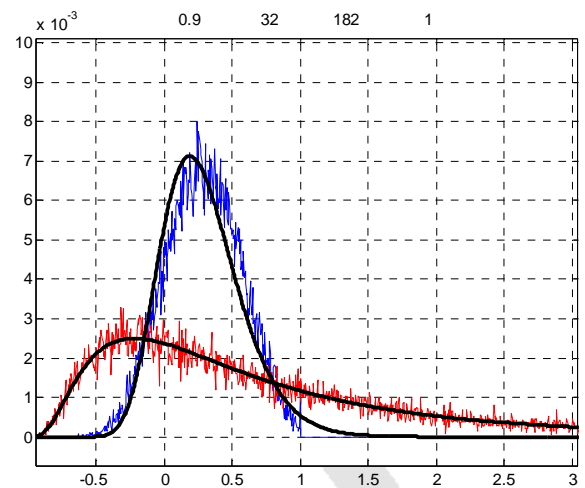
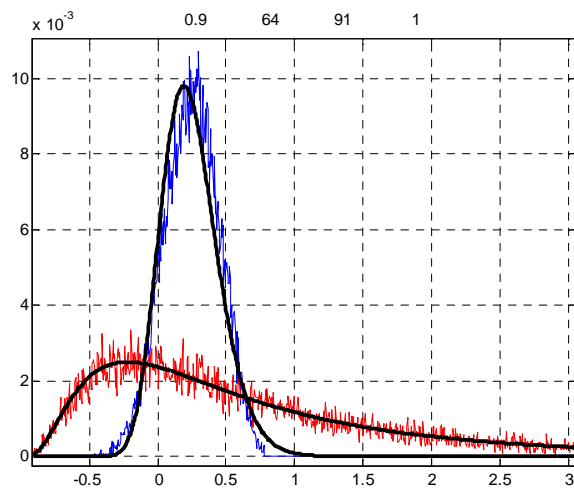


Abb.8 Renditeverteilungen eines Discountzertifikats ($c = 0.9$) mit unterschiedlichen Iterationszahlen. In der Überschrift der jeweiligen Abbildung steht c , die Iterationszahl n , die Laufzeit t in Tagen und 1 (d.h. Berechnung ohne Berücksichtigung von Spesen). Die rote Kurve ist die Renditeverteilung des Underlyings ($\mu_V = 0.04$, $\sigma_V = 0.2$) am Iterationsende. In schwarz ist die asymptotische Verteilung Gleichung 20 gezeigt, die für $n=32$ und $n=64$ bereits eine ausgezeichnete Näherung darstellt.

In einem zweiten Beispiel wird $c = 1$ gewählt.

Während für $c < 1$ für steigende n die mittlere Rendite und die Verlustwahrscheinlichkeit $\text{prob}(R < 0)_{16Y}$ sinkt, kehrt sich dies für $c \geq 1$ um: die mittlere Rendite und $\text{prob}(R < 0)_{16Y}$ steigen leicht an. Im Vergleich zu $c = 0.9$ sind die Verteilungen schon etwas rechtsschief. Für $c > 1$ werden die Verteilungen immer schiefer und damit U - ähnlicher.

	U	D ₆₄	D ₃₂	D ₁₆	D ₈	D ₄
Iterationszahl n		64	32	16	8	4
t [in Tagen]		91	182	364	728	1456
R _{max}		4,1%	5,9%	8,8%	13,2%	20,3%
c		100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
Discount		-3,9%	-5,6%	-8,1%	-11,6%	-16,9%
E(R)		0,6%	1,2%	2,3%	4,6%	9,1%
V(R) ^{1/2}		5,2%	7,1%	9,7%	13,2%	17,6%
E(R) _Y	4,0%	2,4%	2,4%	2,3%	2,3%	2,2%
V(R) _Y ^{1/2}	20,0%	10,4%	10,1%	9,7%	9,3%	8,8%
E(R) _{16Y}	87,3%	46,5%	45,8%	44,8%	43,6%	41,9%
V(R) _{16Y} ^{1/2}	166,0%	62,9%	60,3%	56,9%	52,5%	46,8%
prob(R < 0) _{16Y}	32,9%	24,4%	24,1%	23,4%	22,6%	21,7%
prob(R < -50%) _{16Y}	8,8%	1,6%	1,8%	1,7%	1,9%	2,0%
R _{max16Y}		1193,2%	534,4%	283,6%	168,8%	109,2%
P _{max16Y}		0,5%	0,5%	0,5%	0,9%	12,3%
ρ		77,3%	73,8%	71,8%	67,5%	62,8%
Modus	-21,6%	11,2%	11,7%	~30%	~40%	~40%
fairer Preis		961	944	919	884	832

Tab. 2 Kennzahlen n-fach iterierter Discountzertifikate mit $c = 1$ zusammen mit ihrem Underlying

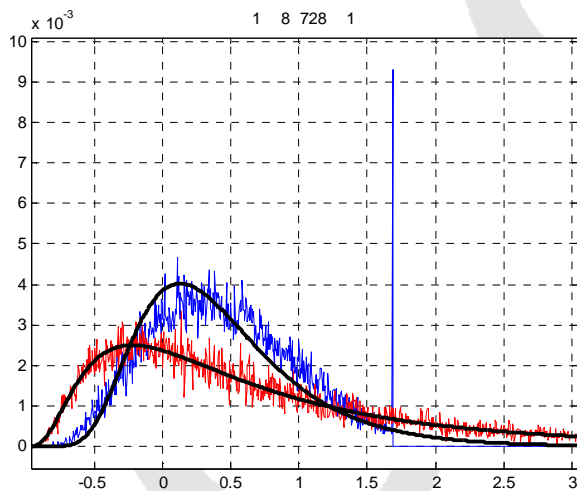
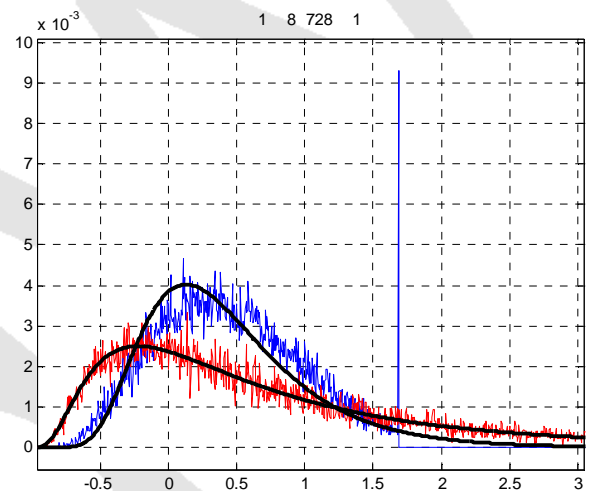
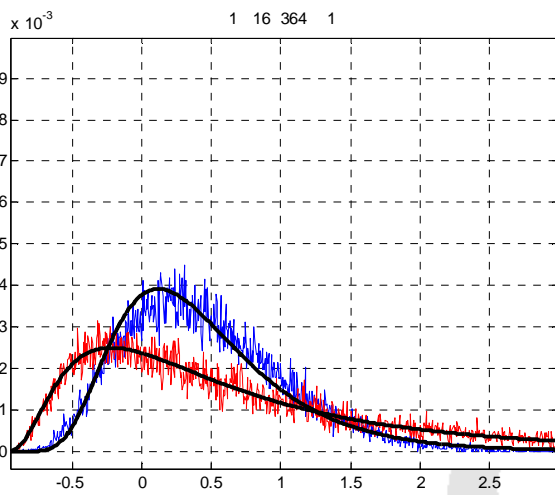
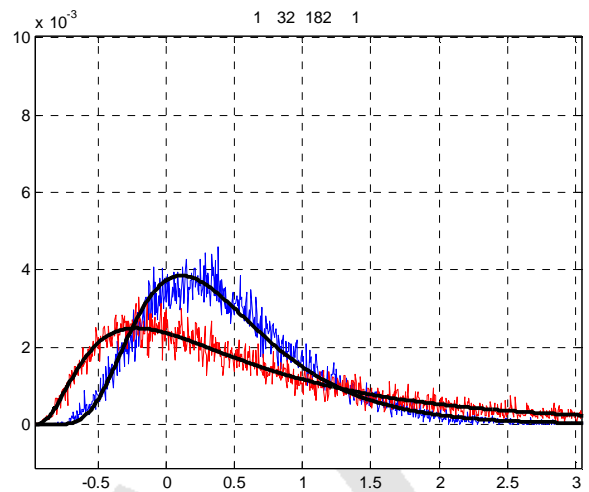
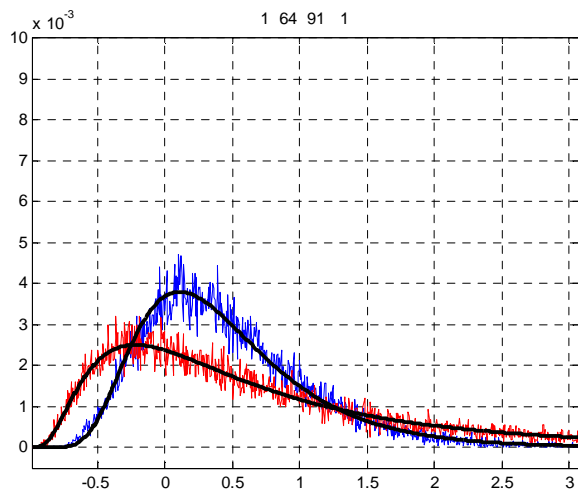


Abb.9 Renditeverteilungen eines Discountzertifikats ($c = 1$) mit unterschiedlichen Iterationszahlen n . Die rote Kurve ist die Renditeverteilung des Underlyings ($\mu_Y = 0,04$, $\sigma_Y = 0,2$) am Iterationsende nach 16 Jahren. In schwarz ist die asymptotische Verteilung (Gl. 20) gezeigt, die für $n=32$ und $n=64$ die Verteilung von D korrekt beschreibt.

In der folgenden Abbildung wird die mittlere Rendite iterierter D's auf der x-Achse gegen die Verlustwahrscheinlichkeiten $\text{prob}(R_D < 0)_{16Y}$ auf der y-Achse aufgetragen. Die Pfeile zeigen in die Richtung steigender Iterationszahlen n . Für Spesen $S = 0$ liegen alle Wertepaare auf den durchgezogenen Kurvenstücken und bilden zusammen eine konvexe Kurve, die den Wurzelzusammenhang zwischen Volatilität und Rendite widerspiegelt. U wird auf dieser Kurve nur durch einen Punkt weit rechts bei hoher mittlerer Rendite und hoher Verlustwahrscheinlichkeit charakterisiert. Die gesamte Kurve zeigt den Gestaltungsspielraum, den man mit Discountzertifikaten hat.

Die gepunkteten Kurven zeigen den starken Einfluss von S . Selbst für kleine $S = 0.5\%$ pro Iteration entweichen sie schnell in den Bereich hoher Verlustwahrscheinlichkeiten und niedriger Renditen. Damit erklärt sich auch die schlechte Performance der sog. rollierenden Discountzertifikate mit hohen Iterationszahlen und versteckten Spesen.

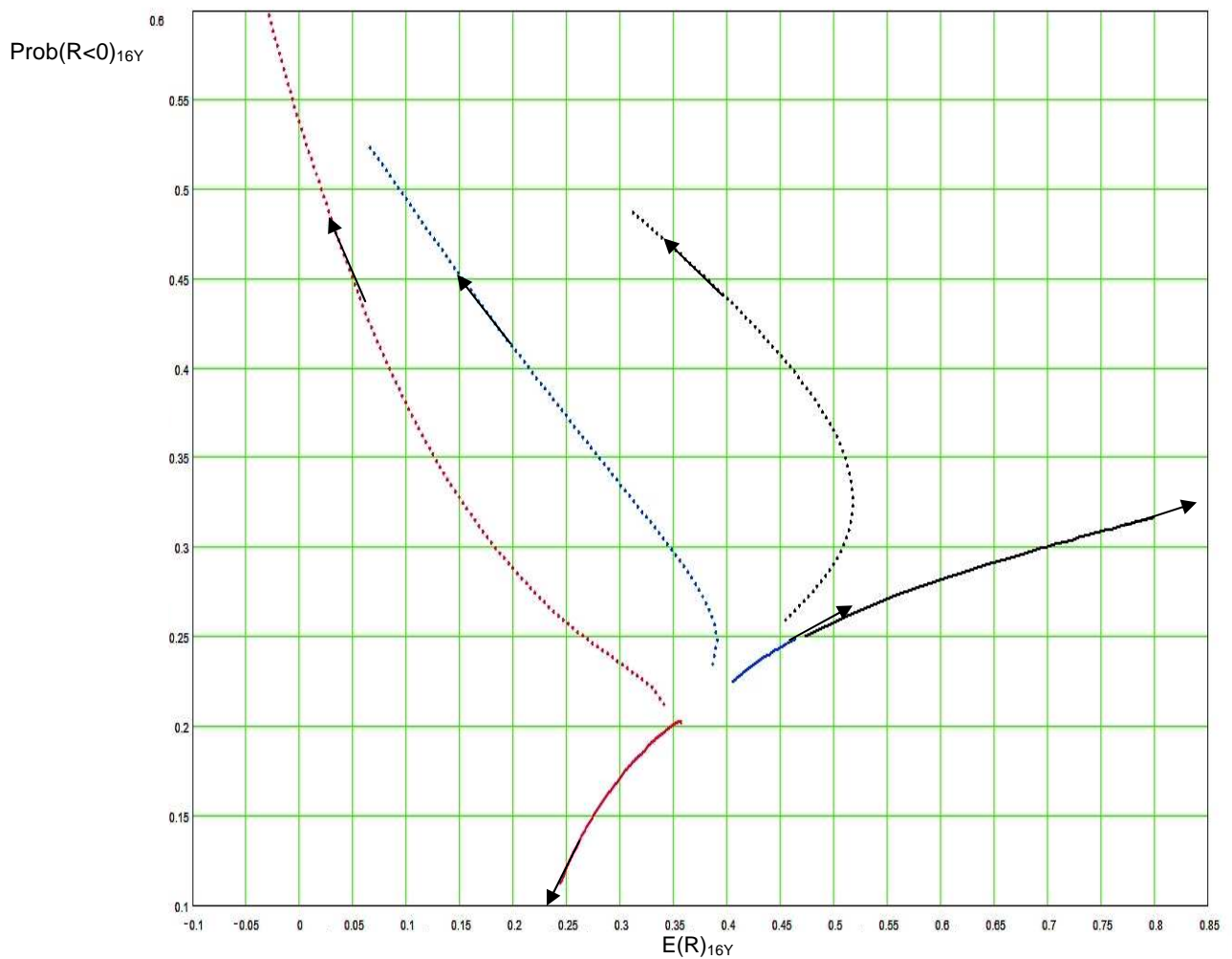


Abb.10. Verlustwahrscheinlichkeit nach 16 Jahren aufgetragen gegen die erwartete mittlere Rendite iterierter Discountzertifikate mit unterschiedlichen Laufzeiten t und Caps (rot: $c = 0.9$, blau: $c=1$, schwarz: $c=1.15$). Durchgezogene Linien: Spesen $S=0$, gepunktet: Spesen $S=0.5\%$.