

Seilphysik 3: innere und äußere Reibung, Seilkontrolle und Experimente

Version 1 (28.3.2012)

Ulrich Leuthäusser

In der hier vorliegenden dritten Arbeit über Seilphysik werden die vollständigen Bewegungsgleichungen für einen Sturz in ein Kletterseil aufgestellt und gelöst. Dabei werden die innere Reibung im Seil und die äußere Reibung an einem alleinigen Umlenkungspunkt berücksichtigt. Ein wesentlicher Teil der Arbeit besteht in der Diskussion der Kontrolle des Sturzes, die der Sichernde mittels Seildurchlauf durch die Seilbremse hat. Messungen des Fangstosses, der Kraft auf den Sichernden und auf die Umlenkung mit und ohne Seilkontrolle können durch die Theorie vollständig erklärt werden.

Inhaltsangabe

1. Das Seilmodell mit innerer und äußerer Reibung	3
2. Das Kraftsystem des Seils	6
3. Die Bewegungsgleichungen	8
3.1. Spezielle Fälle	10
3.1.1. $m_f = 0$ und innere Reibung gleich Null	10
3.1.2. Äußere Reibung $R = 0$	11
3.1.3. Große äußere Reibung.....	11
4. Gleichungssystem für $m_f = 0$ und dessen Lösung.....	11
5. Energiebetrachtungen	15
6. Kontrolle durch den Sichernden.....	16
6.1. Ein einfaches Modell ohne innere Reibung mit Seildurchlauf y_0	16
6.2. Seilkontrolle mit innerer und äußerer Reibung	22
7. Vergleich mit Experimenten	24
8. Schlussfolgerungen	28
9. Acknowledgment	29

1. Das Seilmodell mit innerer und äußerer Reibung

Während in einer ersten Arbeit [1] vor allem die innere Reibung eines Kletterseils und in einer zweiten Arbeit [2] hauptsächlich die Konsequenzen der äußeren Reibung besprochen wurden, werden hier beide Reibungsarten zusammen betrachtet. Die innere und äußere Reibung zusammen mit den elastischen Eigenschaften des Seils sind nötig, um die Kräfte, die bei einem Sturz mit einer Umlenkung auftreten, zu berechnen und nun vorliegende, präzise Messungen [3] zu erklären. Die Arbeit kann unabhängig von den ersten beiden gelesen werden.

Bevor das hier verwendete Seilmodell genauer beschrieben wird, ist es interessant, das Seil einmal kurz auf der mikroskopischen Beschreibungsebene zu betrachten.

Mikroskopisch gesehen besteht ein Kletterseil aus Polymerfasern der Sorte Polyamid, deren Kettenmoleküle verknäulte Strukturen ähnlich wie gekochte Spaghetti haben.

Ein einzelnes Kettenmolekül (d.h. 1 Spaghetti) besteht aus gleichen chemischen Bausteinen, die durch eine äußere Kraft einfach entknäult werden können, also leicht zu strecken sind. Nach Entfernung der äußeren Kraft ziehen sich die Kettenmoleküle schnell wieder zusammen, was zu hoher Elastizität führt. Verantwortlich dafür ist die Entropie, denn als Maß für die Ungeordnetheit eines Zustands nimmt ein Polymer diesen statistisch günstigen, verknäulten Zustand mit hoher Entropie schnell wieder ein. Man spricht deshalb auch von Entropieelastizität. Da höhere Temperaturen diesen Effekt verstärken, ist die Entropie auch verantwortlich dafür, dass sich ein Polymer bei Erwärmung im Gegensatz zu den meisten anderen Materialien zusammenzieht (das ist auch der Grund, warum Kletterschuhe, ebenfalls aus Polymeren hergestellt, so schmerzen, wenn die Sonne drauf scheint).

Die einzelnen Kettenmoleküle bilden ein Netzgeflecht und reiben (je nach Vulkanisation) aneinander, so dass Polymere neben ihrem elastischen auch viskoses Verhalten zeigen. Dies ist extrem wünschenswert, weil es ohne diese innere Reibung keine Energieabsorption des Kletterseils gäbe.

Liegt sowohl elastisches wie viskoses Verhalten vor, spricht man von einem viskoelastischen Material. Solch ein Material verhält sich nach dem Entfernen einer äußeren Kraft zwar ähnlich wie ein elastisches Material (zieht sich also auch plötzlich zusammen), kehrt aber danach verzögert in seinen Ausgangszustand zurück. Dies ist ein Beispiel für einen Gedächtniseffekt, denn obwohl die Kraft bereits Null ist, bewegt sich das viskoelastische Material immer noch. Gedächtniseffekte führen immer zu Energiedissipation. Außerdem ergeben sich dadurch Bewegungsgleichungen für Spannung und Dehnung in Form von Integralgleichungen. Diese eher abstrakte, aber elegante phänomenologische Beschreibung ist äquivalent zu einer sehr anschaulichen Darstellung mit mechanischen Modellen aus Federn und Dämpfungselementen mit Hilfe der Viskoelastizitätstheorie. Wie mit einem Baukasten kann man komplexes Verhalten viskoelastischer Materialien mit Anordnungen von Federn und Dämpfungselementen nachbilden.

Glücklicherweise stellt sich heraus, dass ein relativ einfaches SLS (Standard Linear Solid) Modell als ein Dreiparametermodell für die Beschreibung eines Kletterseils ausreicht.

In der Abb.1-1 ist auf jeder Seite der Umlenkung ein SLS - Modell verwendet. Es besteht aus zwei unterschiedlichen Federn und einem Dämpfungselement. Die Feder, die parallel zum Dämpfungselement geschaltet ist, ist für das Langzeitverhalten (2-3 sec) des Seils verantwortlich. Für die interessanteren kürzeren Zeiten (0.1-0.3 sec) bis zum Eintreten der maximalen Kraft und kurz danach, sind daher eigentlich nur zwei Parameter zur Beschreibung nötig. Im Einzelnen benötigt man folgende Parameter, die sich aus den drei längenunabhängigen Materialparametern E_1 , E_2 und η berechnen lassen:

[1] U. Leuthäusser, Viskoelastische Theorie von Kletterseilen.

http://www.sigmadewe.com/fileadmin/user_upload/pdf-Dateien/SEILPHYSIK.pdf

[2] U. Leuthäusser, Physics of climbing ropes: impact forces, fall factors and rope drag.

http://www.sigmadewe.com/fileadmin/user_upload/pdf-Dateien/Physics_of_climbing_ropes_Part_2.pdf

[3] DAV Sicherheitsforschung: Daten, Messungen und Sturzmodell. Garmisch-Partenkirchen 2011

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \frac{q}{L_1} E1 & k_{12} &= \frac{q}{L_2} E1 & k_1 &= \left(\frac{1}{k_{11}} + \frac{1}{k_{12}} \right)^{-1} = \frac{q}{L} E1 \\
 k_{21} &= \frac{q}{L_1} E2 & k_{22} &= \frac{q}{L_2} E2 & k_2 &= \left(\frac{1}{k_{21}} + \frac{1}{k_{22}} \right)^{-1} = \frac{q}{L} E2 \\
 \eta_1 &= \frac{q}{L_1} \eta & \eta_2 &= \frac{q}{L_2} \eta
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Die Federkonstanten k_1 , k_2 und die Viskosität $q/L\eta$ sind die Parameter des SLS -Modells ohne die Umlenkung, wenn die zwei hintereinander geschalteten SLS - Modelle zu einem zusammengefasst werden.

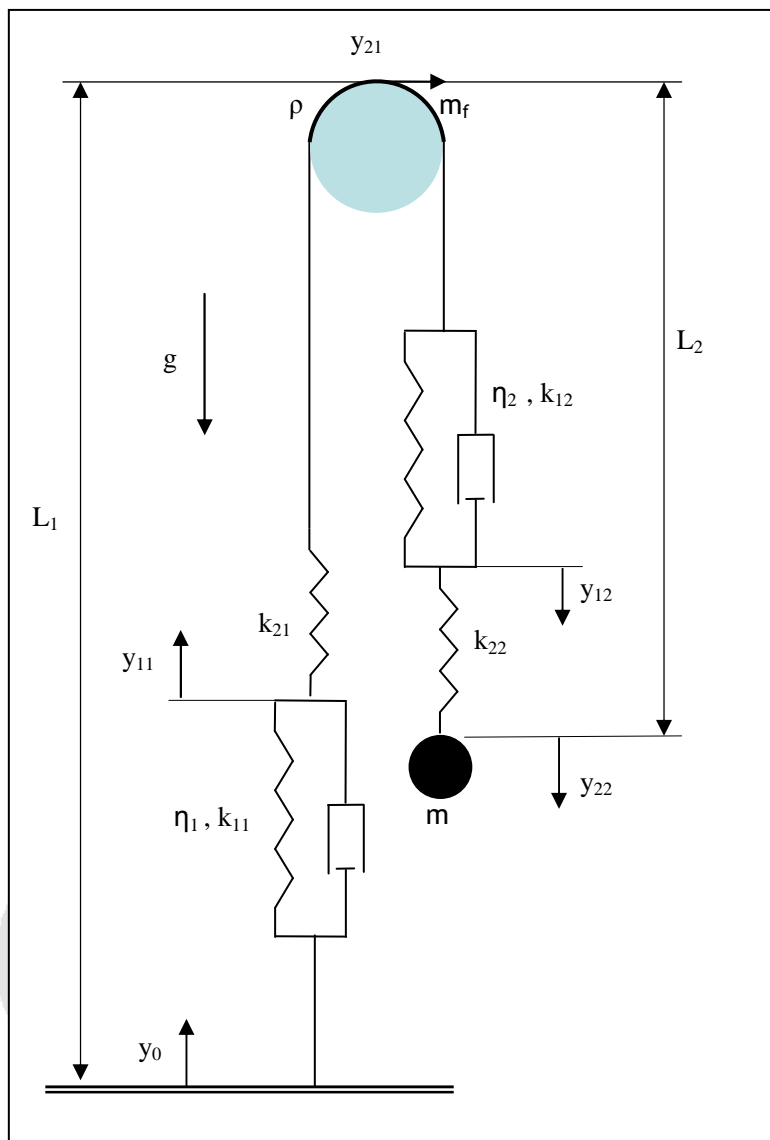


Abb.1-1: 3-Parametermodell: alle auftauchenden längenabhängigen Parameter k_{ij} und η_i (siehe (1.1)) sind durch 2 Elastizitätsmodule E1 und E2 und die Viskosität η gegeben. m_f ist die Masse des Seilstücks in der Umgebung der Umlenkung. L , L_1 , L_2 , ρ und y_0 werden im Text erklärt.

q ist der Querschnitt des Seils, L_1 ist die Länge des Seilstücks vor der Umlenkung und L_2 die Länge zwischen Umlenkung und Sturzmasse. Die Gesamtlänge des Seils ist $L = L_1 + L_2$.

Hinzu kommen folgende Variablen: y_{22} beschreibt die Dehnung des Seils an der Sturzmasse m , y_{21} ist die Verschiebung des Seils an der Umlenkung, y_{11} und y_{12} sind nicht beobachtbare innere Variablen und y_0 ist eine vorgegebene Funktion der Zeit, mit der der Sichernde den Sturz kontrollieren kann.

Die Größenordnungen der Materialparameter lassen sich leicht abschätzen:

Der Elastizitätsmodul $E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$ wird bestimmt durch Messung der Dehnung beim Anlegen einer mechanischen Spannung. Belastet man das Seil mit dem Gewicht 80 kg, das beim Normsturz verwendet wird, und nimmt man eine typische relative statische Dehnung ϵ_s eines Kletterseils von 7.5% an, dann erhält man für ein Seil mit 10 mm Durchmesser

$$E = \frac{mg}{\epsilon_s \cdot \pi r^2} = 1.3 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = 0.13 \text{ GPa} .$$

Interessant ist der Vergleich mit Polyamid (2-4 GPa), Gummi (0.01-0.1 GPa) oder Hanf (35 GPa). Ein Kletterseil hat also einen deutlich kleineren Elastizitätsmodul als ein Nylonfaden, was auf die komplexe innere spiralförmige Struktur des Seiles zurückzuführen ist.

E_2 ist bestimmt durch die dynamische Dehnung ϵ_d , die unter Normsturzbedingungen etwa 4 Mal höher ist als die statische. E_2 lässt sich abschätzen mit Hilfe von (siehe [1])

$$E_2 \approx \frac{F^{\max}}{\epsilon_d \cdot q} = \frac{2fmg}{\epsilon_d^2 \cdot q} \approx 0.38 \text{ GPa}$$

mit dem Sturfaktor $f = 1.77$ für den UIAA Normsturz und F^{\max} als maximalen Fangstoß.

Zwar ist ϵ_d vier Mal größer als ϵ_s , aber der Fangstoss ist dafür auch etwa zehn Mal größer als die statische Kraft des Normgewichts (d.h. der Kletterer würde bei einer Messung seines Gewichts beim maximalen Fangstoß einen 10-fach höheren Wert erhalten). Es ist also umgekehrt: ein Seil lässt sich statisch weit mehr dehnen als dynamisch. Je langsamer man zieht, desto größer ist die Elongation, was typisch für viskoelastische Materialien ist.

Die Viskosität kann man abschätzen, wenn man berücksichtigt, dass die typische Zeit, in der ein Sturz abläuft, nur wenige Zehntelsekunden beträgt und diese Zeit durch das Verhältnis Viskosität durch Elastizitätsmodul gegeben ist, so dass

$$\eta \sim 3/10 [\text{sec}] \cdot E_2 [\text{GPa}] \cong 0.1 [\text{GPa sec}] .$$

Dies entspricht einem Dämpfungsgrad von ca. 0.2, damit ist ein Seil also deutlich vom aperiodischen Grenzfall entfernt, bei dem der Dämpfungsgrad gleich 1 ist. Gummi, beispielsweise, ist noch weniger gedämpft und liegt zwischen 0.01 und 0.05.

Weiterhin ist in dem Seilmodell die äußere Reibung (auch trockene Reibung genannt) zwischen Seil und Umlenkung berücksichtigt. Die äußere Reibung ist im Gegensatz zur inneren Reibung geschwindigkeitsunabhängig und wird, wie etwas später gezeigt wird, durch die Größe

$$\rho = e^{\pi\mu} \tag{1.2}$$

charakterisiert mit dem Reibungskoeffizienten μ . Dieser beträgt, wie sich bei den Experimenten in Abschnitt 7 herausstellt, etwa 0.13.

2. Das Kraftsystem des Seils

Zunächst wird das Seil an der Umlenkung allein untersucht, so dass die Reaktionskraft dK und die Reibungskraft dR (siehe Abb.2-1) berücksichtigt werden müssen. Wir betrachten eine bestimmte Stelle auf der Umlenkung, bei der bereits ein Kontaktwinkel α mit dem Seil vorhanden ist und dort eine infinitesimale Winkeländerung $d\alpha$ hinzukommt.

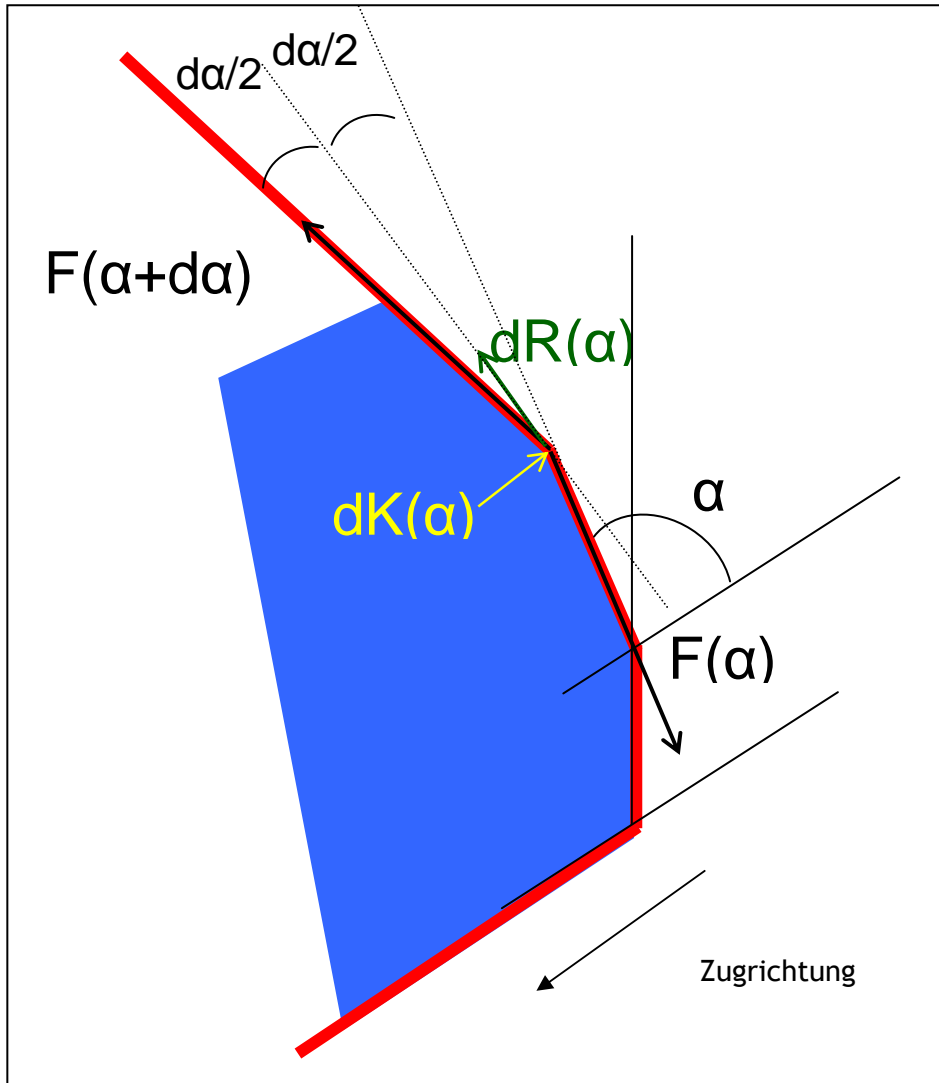


Abb.2-1: Kräfte an einem Teilstück des Seils an einer Umlenkung, die nicht notwendig kreisförmig sein muss. α ist der Kontaktwinkel an einer bestimmten Stelle der Umlenkung (z.B. als Funktion der Bogenlänge) und enthält alle Winkeländerungen des Seils bis dorthin.

Parallel zu $dR(\alpha)$ gilt für $d\alpha$: $-F(\alpha + d\alpha) - dR(\alpha) + F(\alpha) = 0$ und

senkrecht zu $dR(\alpha)$ gilt $-F(\alpha + d\alpha) \frac{d\alpha}{2} - F(\alpha) \frac{d\alpha}{2} + dK(\alpha) = 0$.

Mit der Reibungskraft $dR = \mu \cdot dK$ folgt $dK(\alpha) = F(\alpha)d\alpha = 1/\mu dR(\alpha)$ und mit Hilfe der ersten Gleichung $F(\alpha) + dF(\alpha) = F(\alpha) - \mu F(\alpha)d\alpha$ oder $\frac{dF}{F} = -\mu d\alpha$. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$F(\alpha) = F_0 \exp(-\mu\alpha) \quad (2.1)$$

bekannt als Euler-Eytelwein Formel. Die Summierung aller infinitesimalen Reibungskräfte $dR(\alpha)$ ergibt:

$$R(\alpha) = \int_0^\alpha dR = F_0 (1 - \exp(-\mu\alpha)) \quad (2.2)$$

Mit Hilfe der Kräftebilanz $-F_0 + F(\alpha) + \int_0^\alpha dR = -F_0 + F(\alpha) + R(\alpha) = 0$ wird ersichtlich, dass die Differenz der Zugkraft F_0 und der Haltekraft $F(\alpha)$ gleich der Summe aller Reibungskräfte auf der Kontaktfläche zwischen Umlenkung und Seil ist.

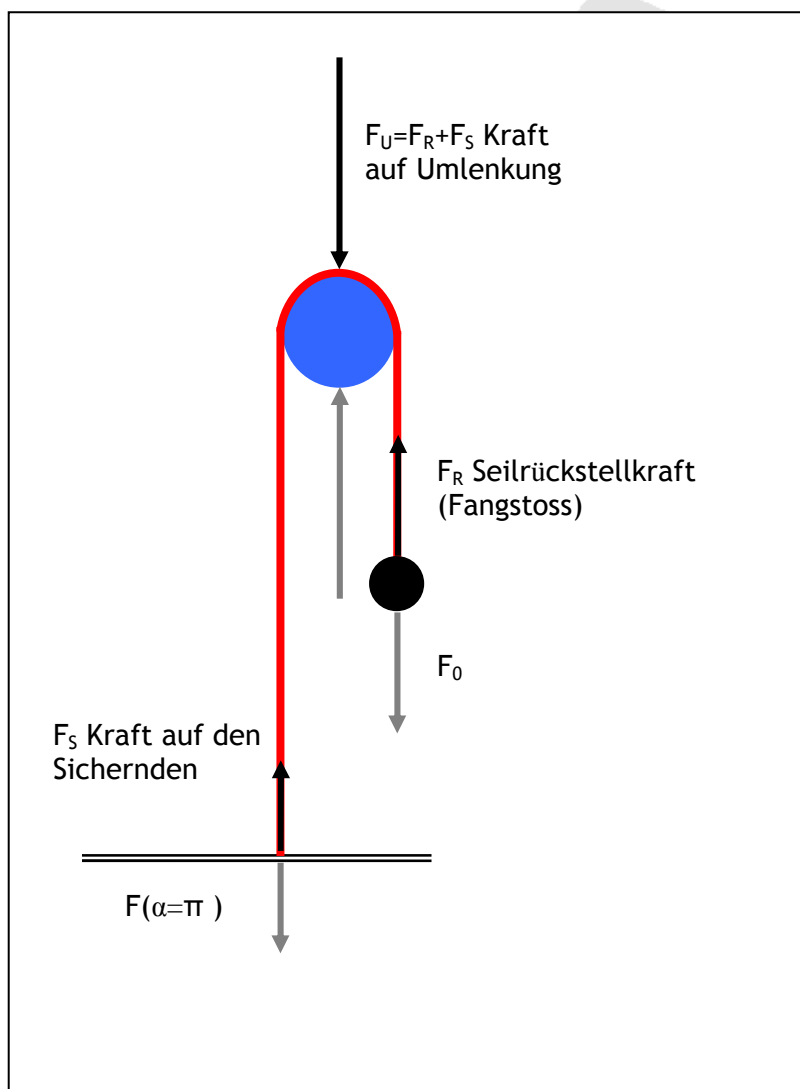


Abb.2-2: Kräfte des Systems "Umlenkung + Seil": am Stand (F_S), an der Umlenkung (F_U) und am Seil (F_R). Die Reibungskraft als innere Kraft des Systems "Umlenkung + Seil" taucht nicht auf.

Die Kraft F_0 mit umgekehrtem Vorzeichen ist die Rückstellkraft des Seils am Seilende mit der Sturzmasse und wird als F_R bezeichnet (siehe Abb.2-2). Obwohl physikalisch kein Stoss, wird F_R gewöhnlich Fangstoss genannt. Die Kraft auf den Stand (Sturzzug) ist $-F(\alpha = \pi)$ und wird hier F_S genannt. Die Kraft auf die Umlenkung ist die Summe beider Kräfte $F_U = F_S + F_R$, was sich sofort aus dem Kräftegleichgewicht der einfachen geometrischen Situation $\alpha = \pi$ in Abb.2-2 ergibt. Für $\alpha = \pi$ erhält man außerdem für die Reibungskraft

$$R = F_S - F_R \quad (2.3)$$

Mit Hilfe der obigen Formeln gilt für die Bewegung in Sturzrichtung

$$F_S = \frac{1}{\rho} F_R$$

$$R = F_S - F_R = F_S - F_S \rho = F_S (1 - \rho) = F_R \frac{1 - \rho}{\rho} \quad (2.4)$$

$$F_U = F_R \left(1 + \frac{1}{\rho} \right)$$

mit $\rho = e^{\mu\theta}$. Die Gleichungen (2.4) gelten für die wichtigen Maxima von F_S und F_R . Für die Bewegung in Gegenrichtung gilt jedoch

$$R = F_S - F_R = F_R \rho - F_R = F_R (\rho - 1) \quad (2.5)$$

In Sturzrichtung folgt für große Reibung ($\rho \gg 1$) $R = -F_R$, d.h. $F_S = 0$, die Kraft auf den Stand verschwindet also in diesem Fall, dafür wirkt auf die Umlenkung das doppelte F_R :

$$F_U = \begin{cases} 2F_R & \rho = 1, \text{ Reibung Null} \\ F_R & \rho \gg 1, \text{ große Reibung} \end{cases}$$

3. Die Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für die Situation der Abb-1-1 erhält man am einfachsten mit dem Lagrangeformalismus [4]. Die Lagrangefunktion L

$$L = \frac{1}{2} m \cdot \dot{y}_{22}^2 + \frac{1}{2} m_f \cdot \dot{y}_{21}^2 - \left[\frac{1}{2} k_{22} (y_{22} - y_{12})^2 + \frac{1}{2} k_{12} (y_{12} - y_{21})^2 + \frac{1}{2} k_{21} (y_{21} - y_{11})^2 + \frac{1}{2} k_{11} (y_{11} - y_0)^2 - mgy_{22} \right] \quad (3.1)$$

besteht erstens aus der kinetischen Energie mit der Sturzmasse m und der Masse des Seilstücks m_f in der Umgebung der Umlenkung. Hinzu kommt die potentielle Energie (eckige Klammer von 3.1) in Form der verschiedenen elastischen Dehnungsenergien und der potentiellen Energie der Sturzmasse im Schwerfeld. Die gesamte Reibung wird durch die Dissipationsfunktion D berücksichtigt:

[4] z.B.: D. A. Wells, Lagrangian Dynamics. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.

$$D = \frac{1}{2} \eta_1 (\dot{y}_{11} - \dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2} \eta_2 (\dot{y}_{12} - \dot{y}_{21})^2 + |\dot{y}_{21}| (\rho - 1) \min(|k_{21}(y_{21} - y_{11})|, |k_{22}(y_{22} - y_{12})|)$$

Mit Hilfe der Lagrangegleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_i}$, angewandt auf alle vorkommenden y_{ij} , erhält man die folgenden Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{y}_{22} + k_{22}(y_{22} - y_{12}) = mg$$

$$\eta_2 (\dot{y}_{12} - \dot{y}_{21}) + k_{12}(y_{12} - y_{21}) + k_{22}(y_{12} - y_{22}) = 0$$

(3.2)

$$\eta_1 (\dot{y}_{11} - \dot{y}_0) + k_{11}(y_{11} - y_0) + k_{21}(y_{11} - y_{21}) = 0$$

$$m_f \ddot{y}_{21} + k_{21}(y_{21} - y_{11}) + k_{22}(y_{12} - y_{22}) - R = 0$$

mit der Reibungskraft

$$R = -\frac{\dot{y}_{21}}{|\dot{y}_{21}|} (\rho - 1) \min(|k_{21}(y_{21} - y_{11})|, |k_{22}(y_{22} - y_{12})|) = -\frac{\dot{y}_{21}}{|\dot{y}_{21}|} (\rho - 1) \min(|F_S|, |F_R|)$$

(3.3)

die die Kräfte $F_R = -k_{22}(y_{22} - y_{12})$ und $F_S = k_{21}(y_{21} - y_{11})$ enthält.

Für den Fall $\dot{y}_{21} > 0$ entspricht R genau der zweiten Gleichung von (2.4) und für $\dot{y}_{21} < 0$ der Gleichung (2.5).

Sieht man einmal von den viskosen Kräften ab, kann man das obige Gleichungssystem (3.2) auch ohne Lagrange gut nachvollziehen, indem man die Kräftebilanzen mit Hilfe der Abbildung 1-1 an den Positionen y_{11} , y_{21} , y_{12} und y_{22} aufstellt.

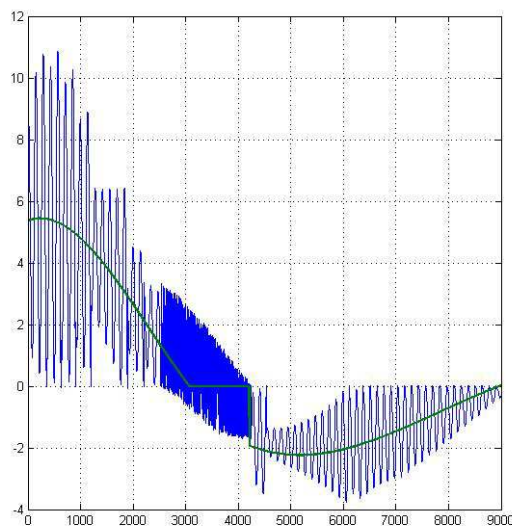


Abb.3-1: y_{21} in Abhängigkeit von der Zeit [10^{-4} sec] für $m_f = 0$ (grün) und $m_f = 0.06$ kg (blau).

Wegen der kleinen Masse m_f treten in (3.2) schnelle Oszillationen (siehe Abb.3-1) in den Geschwindigkeiten \dot{y}_{21} und \dot{y}_{12} auf, was bei zu großer Schrittweitenwahl bei der Integration der Gleichungen leicht zu Fehlern führen kann.

Es ist auch nicht exakt festzulegen, wie lang man das Seilstück und damit seine Masse m_f an der Umlenkung zu wählen hat. Es ist aber sicher kleiner als 1 Meter, so dass sich deshalb eine sehr kleine, vernachlässigbare Masse von $m_f < 0.06$ kg ergibt.

Im Abschnitt 4 werden deshalb die Gleichungen (3.2) für $m_f = 0$ gelöst. Es wurde sicher gestellt, dass die Ergebnisse für die entscheidenden Größen y_{22} , v_{22} und a_{22} gleich sind, unabhängig davon, ob sie für kleine m_f oder für m_f exakt gleich Null erlangt worden sind.

3.1. Spezielle Fälle

Hier wird der Bezug zu den bereits besprochenen Gleichungen aus den ersten beiden Arbeiten hergestellt.

3.1.1. $m_f = 0$ und innere Reibung gleich Null

Die innere Reibung kann auf zwei verschiedene Weisen Null werden, entweder Viskosität $\eta = 0$ oder Viskosität $\eta \rightarrow \infty$.

Für $m_f = 0$ und $\eta = 0$, sowie für Zeiten bis zum Fangstossmaximum gilt die Reibungskraft $R = -k_{21}(\rho - 1)(y_{21} - y_{11})$ und man erhält

$$m\ddot{y}_{22} + \frac{k_{22}k_{12}}{k_{22} + k_{12}}(y_{22} - y_{21}) = mg \quad (3.4)$$

$$\frac{k_{21}k_{11}}{k_{21} + k_{11}}(y_{21} - y_0) = \frac{1}{\rho} \frac{k_{22}k_{12}}{k_{22} + k_{12}}(y_{22} - y_{21})$$

Dies sind die Gleichungen (4) aus "Physics of Climbing Ropes [2]", wenn man berücksichtigt, dass die seriell geschalteten Federkonstanten k_{11} und k_{21} bzw. k_{22} und k_{12} durch die Federkonstanten $K_1 = \frac{k_{21}k_{11}}{k_{21} + k_{11}}$ und $K_2 = \frac{k_{22}k_{12}}{k_{22} + k_{12}}$ ersetzt werden müssen.

Wenn man noch y_{21} eliminiert, dann erhält man ($m_f = 0$ und $\eta = 0$)

$$m\ddot{y}_{22} + \frac{\rho K_1 K_2}{\rho K_1 + K_2}(y_{22} - y_0) = mg \quad (3.5a)$$

Für $\eta \rightarrow \infty$ erhält man das gleiche Ergebnis wie oben nur mit anderen Federkonstanten, weil durch ein großes η die Federkonstanten k_{11} und k_{12} unwirksam werden, so dass

$$m\ddot{y}_{22} + \frac{\rho k_{22}k_{21}}{\rho k_{21} + k_{22}}(y_{22} - y_0) = mg. \quad (3.5b)$$

3.1.2. Äußere Reibung $R = 0$

Für $R = 0$ ergibt sich durch Elimination von y_{21} und y_{11} das Gleichungssystem (1) aus der Arbeit "Viskoelastische Theorie von Kletterseilen [1]"

$$m\ddot{y}_{22} + \frac{k_{22}k_{21}}{k_{22} + k_{21}}(y_{22} - y_{12}) = mg \quad (3.6)$$

$$\frac{\eta_2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1}(\dot{y}_{12} - \dot{y}_0) + \frac{k_{12}k_{11}}{k_{12} + k_{11}}(y_{12} - y_0) + \frac{k_{22}k_{21}}{k_{22} + k_{21}}(y_{12} - y_{22}) = 0$$

Es ist jedoch zu beachten, dass dies nicht für beliebige η_1 und η_2 gilt, sondern nur wenn die Beziehung $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{L_2}{L_1}$ gilt.

3.1.3. Große äußere Reibung

Für $\rho \gg 1$ kann sich y_{21} nicht mehr bewegen, d.h. $y_{21} = 0$ und es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_{22} + k_{22}(y_{22} - y_{12}) &= mg \\ \eta_2(\dot{y}_{12}) + k_{12}y_{12} + k_{22}(y_{12} - y_{22}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

ohne dass y_0 noch auftaucht, also ohne Kontrollmöglichkeit durch den Sichernden.

4. Gleichungssystem für $m_f = 0$ und dessen Lösung

Setzt man in (3.2) $m_f = 0$, erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_{22} + k_{22}(y_{22} - y_{12}) &= mg \\ \dot{y}_{21} &= |\dot{y}_{21}| \frac{k_{22}(y_{22} - y_{12}) - k_{21}(y_{21} - y_{11})}{(\rho - 1)\min(k_{21}(y_{21} - y_{11}), k_{22}(y_{22} - y_{12}))} \\ \eta_2(\dot{y}_{12} - \dot{y}_{21}) + k_{12}(y_{12} - y_{21}) + k_{22}(y_{12} - y_{22}) &= 0 \\ \eta_1(\dot{y}_{11} - \dot{y}_0) + k_{11}(y_{11} - y_0) + k_{21}(y_{11} - y_{21}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Rückstellkraft des Seils ist gegeben durch $F_R = -k_{22}(y_{22} - y_{12}) = -(mg - m\ddot{y}_{22})$.

Die Kraft auf die Sicherung beträgt $F_S = k_{21}(y_{21} - y_{11})$.

Die Reibungskraft R ist $R = k_{21}(y_{21} - y_{11}) + k_{22}(y_{12} - y_{22}) = F_S - F_R$.

Die Kraft auf die Umlenkung ist $F_U = k_{21}(y_{21} - y_{11}) + k_{22}(y_{22} - y_{12}) = F_S + F_R$.

Man kann das Gleichungssystem (4.1) wie folgt vereinfachen. Wenn die Sturzmasse die Anfangsgeschwindigkeit (bei Beginn der Dehnung) $\dot{y}_{22}(0) = v_0$ hat, dann gilt zwischen

$0 < t < t_1$ (Zeitpunkt des Maximums von y_{21})

$$k_{22}(y_{22} - y_{12}) > k_{21}(y_{21} - y_{11}) > 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}_{21} > 0$$

Deshalb erhält man für die Reibungskraft $R = -(\rho - 1) \cdot k_{21}(y_{21} - y_{11})$ und daher

$$y_{21} = \frac{k_{22}}{k_{21}} \frac{1}{\rho} (y_{22} - y_{12}) + y_{11} \tag{4.2a}$$

Ab einem Zeitpunkt t_2 wird \dot{y}_{21} negativ und es gilt bereits

$k_{21}(y_{21} - y_{11}) > k_{22}(y_{22} - y_{12}) > 0$ (siehe Abb.4-1), so dass die Reibungskraft $R = (\rho - 1) \cdot k_{22}(y_{22} - y_{12})$ beträgt. y_{21} ist dann gegeben durch

$$y_{21} = \frac{k_{22}}{k_{21}} \rho (y_{22} - y_{12}) + y_{11} \tag{4.2b}$$

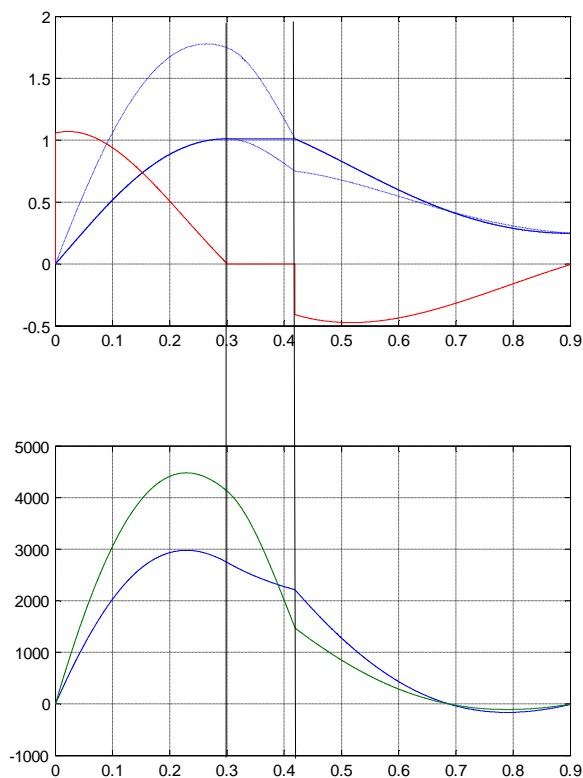


Abb.4-1a: Zeitverlauf von y_{21} (blau) mit den 2 gestrichelten Kurven, auf denen sich y_{21} befinden kann und zwischen denen ein horizontaler Übergang stattfindet. Die rote Kurve ist y_{22} . Die vertikalen Linien geben die Zeiten t_1 und t_2 an.

Abb.4.1b: Kraft $k_{22}(y_{22} - y_{12})$, die rechts an der Umlenkung wirkt (grün) und die Kraft $k_{21}(y_{21} - y_{11})$ links an der Umlenkung (blau).

Zwischen t_1 und t_2 bleibt y_{21} von (4.2a) konstant auf seinem Maximum, wobei t_2 bestimmt ist durch den Schnittpunkt von y_{21} aus (4.2a) mit y_{21} aus (4.2b). Wäre $\dot{y}_{21} \neq 0$, gäbe es nur die Möglichkeiten, sich entweder auf (4.2a) weiter zu bewegen oder einen vertikalen Übergang von (4.2a) auf (4.2b) zu machen, was beides physikalisch unsinnig ist.

Insgesamt erhält man

$$y_{21} = \begin{cases} \frac{k_{22}}{k_{21}} \frac{1}{\rho} (y_{22} - y_{12}) + y_{11} & 0 < t < t_1 \\ \frac{k_{22}}{k_{21}} \frac{1}{\rho} (y_{22}(t_1) - y_{12}(t_1)) + y_{11}(t_1) & t_1 < t < t_2 \\ \frac{k_{22}}{k_{21}} \rho (y_{22} - y_{12}) + y_{11} & t > t_2 \end{cases} \quad (4.2c)$$

und für die Geschwindigkeit von y_{21}

$$v_{21} = \begin{cases} \frac{k_{22}}{k_{21}} \frac{1}{\rho} (v_{22} - v_{12}) + v_{11} & 0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t < t_2 \\ \frac{k_{22}}{k_{21}} \rho (v_{22} - v_{12}) + v_{11} & t > t_2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Aus $v_{21} = 0$ folgt nicht, dass $R = 0$, sondern, dass anstatt Gleitreibung nun Haftreibung vorliegt.

Dies hat 3 Fälle für

$$v_{11} = \dot{y}_{11} = \frac{1}{\eta_1} (-(k_{11} + k_{21})y_{11} + k_{21}y_{21} + k_{11}y_0) + v_0 \quad \text{und für}$$

$$v_{12} = \frac{1}{\eta_2} (k_{12}(y_{21} - y_{12}) + k_{22}(y_{22} - y_{12})) + v_{21}$$

zur Folge. In dem letzten Ausdruck für v_{12} , taucht v_{12} auf der rechten Seite in v_{21} nochmals auf, so dass man noch danach auflösen muss.

Mit v_{12} , v_{11} und y_{21} können die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{y}_{12} &= v_{12} \\ m\ddot{y}_{22} + k_{22}(y_{22} - y_{12}) &= mg \\ \eta_1(\dot{y}_{11} - \dot{y}_0) + k_{11}(y_{11} - y_0) + k_{21}(y_{11} - y_{21}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

nun mit den Anfangsbedingungen

$$y_{ij}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{y}_{ij}(0) = 0 \quad \text{für alle } i, j, \quad \text{außer} \quad \dot{y}_{22}(0) = v_0$$

gelöst werden. v_0 ist die Geschwindigkeit der Sturzmasse bei Beginn der Seileinwirkung. Im Abschnitt 7 wird die Lösung von (4.4) mit experimentellen Daten verglichen.

In der folgenden Abbildung sind der maximale Fangstoß und die maximale Kraft auf die Sicherung sowie deren Summe mit (4.4) berechnet worden und in Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten μ dargestellt.

Es fällt auf, dass unabhängig von der inneren Reibung η die maximale Kraft auf die Umlenkung nur gering von der äußeren Reibung abhängt, während der Fangstoss stark mit μ ansteigt und dementsprechend die Kraft auf den Stand abnimmt.

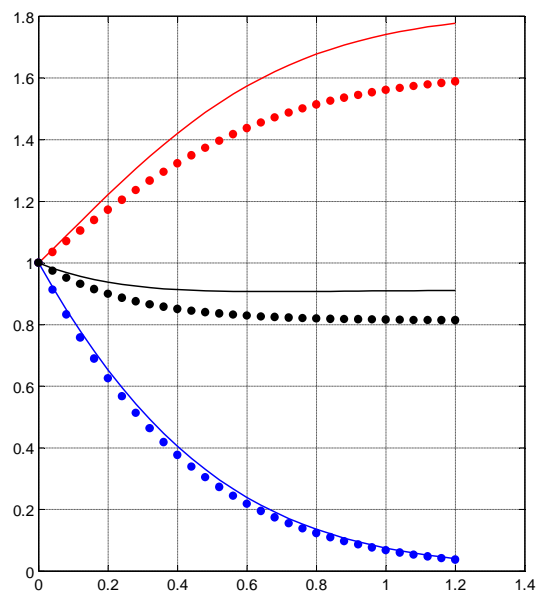


Abb.4-2: Die 3 maximalen Kräfte F_R^{\max} (rot), F_S^{\max} (blau) und F_U^{\max} (schwarz) als Funktion des Reibungskoeffizienten μ und bezogen auf ihren Wert bei $\mu=0$. Die gepunkteten Kurven sind die analytisch verfügbaren Werte für $\eta \rightarrow \infty$.

Die expliziten Ausdrücke der Maxima dieser Kräfte für $\eta \rightarrow \infty$ (gepunktet in Abb.4-2) lauten

mit der effektiven Federkonstante $k_{\text{eff}} = \frac{\rho k_{21} k_{22}}{\rho k_{21} + k_{22}}$:

$$F_R^{\max} = mg + m \sqrt{v_0^2 \frac{k_{\text{eff}}}{m} + g^2}, \quad F_S^{\max} = \frac{1}{\rho} F_R^{\max}, \quad F_U^{\max} = F_R^{\max} + F_S^{\max}$$

Man kann die Analyse bis zum Fangstossmaximum noch etwas weiter führen.

Wie schon gezeigt, gilt bis zum Fangstossmaximum die Gleichung (4.2)

$$y_{21} = \frac{k_{22}}{k_{21}} \frac{1}{\rho} (y_{22} - y_{12}) + y_{11}. \quad \text{Eingesetzt in die letzte Gleichung von (4.4) erhält man}$$

$\rho \eta_1 \dot{y}_{11} + \rho k_{11} y_{11} - k_{22} (y_{22} - y_{12}) = 0$. Durch die Transformation $k'_{11} = \rho k_{11}$, $k'_{21} = \rho k_{21}$, $\eta'_1 = \rho \eta_1$ und unveränderten k_{22}, k_{12} und η_2 werden die Gleichungen in die Form mit $\rho = 1$ ohne äußere

Reibung gebracht. Für kurze Zeiten wirkt die äußere Reibung also wie eine Vergrößerung der Seilparameter k_{11} , k_{21} und η_{11} vor der Reibungsstelle und man kann das Seil betrachten, ohne diesen Punkt explizit zu berücksichtigen.

Mit dieser Transformation können deshalb die Ergebnisse aus der Arbeit "Viskoelastische Theorie von Kletterseilen [1]" übernommen werden. So erhält man für die Kurzzeitentwicklung für die Beschleunigung \ddot{y}_{22}

$$\ddot{y}(t) = g - \frac{v_0}{m} \frac{k_{22}\rho k_{21}}{k_{22} + \rho k_{21}} t + \frac{v_0}{m} \frac{\left(\frac{k_{22}\rho k_{21}}{k_{22} + \rho k_{21}}\right)^2}{\left(\frac{\rho\eta_1\eta_2}{\rho\eta_1 + \eta_2}\right)} \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

5. Energiebetrachtungen

Die durch innere und äußere Reibung dissipierten Energien pro Zeiteinheit sind gegeben durch

$$\dot{E}_A^V = \eta_1 \dot{y}_{11}^2 + \eta_2 (\dot{y}_{12} - \dot{y}_{21})^2$$

$$\dot{E}_A^D = |\dot{y}_{21}| (\rho - 1) \min(|k_{21}(y_{21} - y_{11})|, |k_{22}(y_{22} - y_{12})|)$$

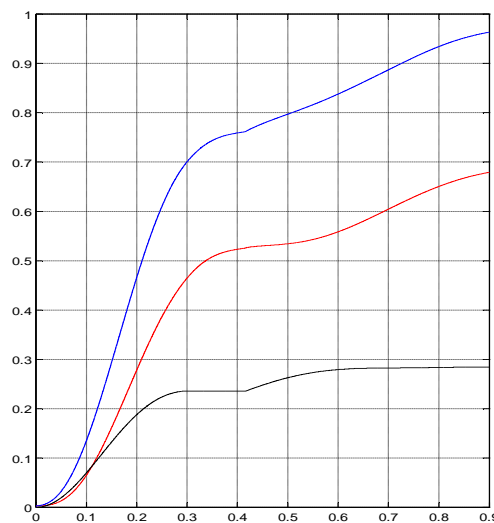


Abb. 5-1: Die bis zum Zeitpunkt t dissipierten Energieanteile der äußeren Reibung $E_A^D(t)$ (schwarz), der inneren, viskosen Reibung $E_A^V(t)$ (rot) und deren Summe $E_A(t) = E_A^V(t) + E_A^D(t)$ (blau). Sie sind bezogen auf die Gesamtenergie, so dass E_A für $t \gg 1$ sec gegen Eins geht.

Bei den hier verwendeten Parametern (siehe Abschnitt 7, Gleichung(7.1)) ist der Anteil der äußeren Reibungsenergie etwa 1/3.

6. Kontrolle durch den Sichernden

Ziel der Seilkontrolle durch den Sichernden ist es, die maximale Kraft auf das Seil bzw. auf den Kletterer bei einer vorgegebenen Seildurchlaufstrecke möglichst klein zu machen.

Dazu wird zunächst ein einfaches, analytisch berechenbares Modell ohne innere Reibung besprochen. Anschließend werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen (4.1) bzw. (4.4) verwendet, um den Einfluss der Seilkontrolle auf den Fangstoss numerisch zu bestimmen.

6.1. Ein einfaches Modell ohne innere Reibung mit Seildurchlauf y_0

Die hier verwendete Terminologie aus der Kontroll- bzw. Optimierungstheorie [5] ist nicht zufällig, weil der mathematische Zugang dort genau der gleiche wie der gewählte ist.

Ausgangspunkt ist Gleichung (3.5): $m\ddot{y}_{22} + \frac{\rho K_1 K_2}{\rho K_1 + K_2} (y_{22} - y_0) = mg$. Wenn man den Index von y

weglässt und die Abkürzung $\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\rho K_1 K_2}{\rho K_1 + K_2}}$ verwendet, erhält man

$$\ddot{y} + \omega^2 (y - y_0) = g \quad (6.1)$$

Die Anfangsbedingungen sind $y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_0$.

Es wird eine möglichst einfache Kontrollfunktion verwendet, so dass eine analytische Lösung von (6.1) möglich ist: der Seildurchlauf $y_0(t)$ beginnt zu einem Zeitpunkt t_0 , läuft mit konstanter Geschwindigkeit u durch die Bremse und stoppt zum Zeitpunkt t_e (siehe Abb.6.1).

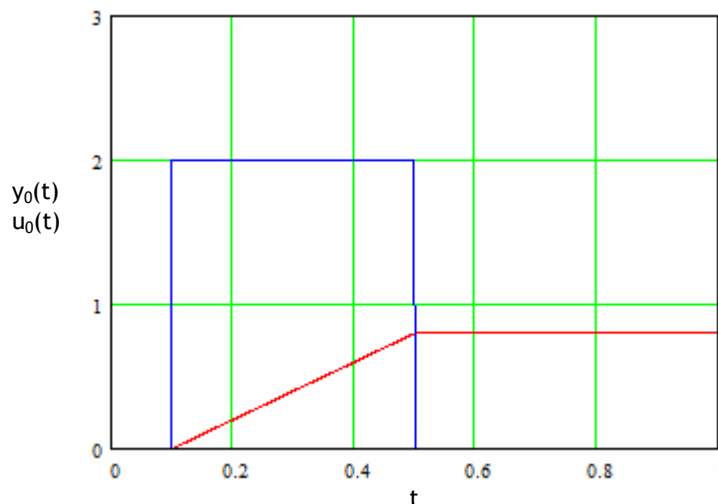


Abb.6-1: $y_0(t)$ (rot) und $u_0(t)$ (blau)

Mathematisch heißt dies:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \Phi(t - t_0)\Phi(t_e - t) \cdot u \cdot (t - t_0) + u \cdot (t_e - t_0)\Phi(t - t_e) \\ u_0(t) &= \Phi(t - t_0)\Phi(t_e - t) \cdot u \end{aligned} \quad (6.2)$$

[5] z.B.: M. Papageorgiou, Optimierung. Oldenbourg Verlag 1991 oder A. Bryson, Dynamic Optimazation. Addison-Wesley 1999

Die Stufenfunktion $\Phi(t)$ ist gegeben durch: $\Phi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

(6.1) lässt sich mittels Laplacetransformation lösen und man erhält

$$y(t, u) = y^0(t) + u \cdot \Phi(t - t_0) \left[t - t_0 - \frac{\sin(\omega(t - t_0))}{\omega} \right] - u \cdot \Phi(t - t_e) \left[t - t_e - \frac{\sin(\omega(t - t_e))}{\omega} \right] \quad (6.3)$$

$$y^0(t) = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

mit $y_0(t)$ als Lösung ohne Seilkontrolle ($u=0$). Die Beschleunigung lautet

$$\ddot{y}(t, u) = a(t, u) = a^0(t) + u\omega \cdot \Phi(t - t_0) \sin(\omega(t - t_0)) - u\omega \cdot \Phi(t - t_e) \sin(\omega(t - t_e)) \quad (6.4)$$

$$a^0(t) = g \cos(\omega t) - v_0 \omega \sin(\omega t)$$

Damit ist auch die Rückstellkraft des Seils gegeben

$$F_R = m\omega^2(y - y_0) = -ma(t, u) + mg = \quad (6.5)$$

$$F_R^0 - u m \omega \cdot \Phi(t - t_0) \sin(\omega(t - t_0)) + u m \omega \cdot \Phi(t - t_e) \sin(\omega(t - t_e))$$

mit $F_R^0 = mg - ma^0$. In der unteren Abbildung ist für einen typischen Sturz die Verringerung des Fangstoßes durch die Seilkontrolle dargestellt.



Abb.6-2: Die schwarze Kurve zeigt die Zeitabhängigkeit des Fangstoßes ohne Kontrolle ($u=0$). Die rote Kurve ist der reduzierte Fangstoß für $t_0=0.075$ sec und $t_e=0.3$ sec mit $u = 3$ m/sec. Die Differenz zwischen der roten und der blau gestrichelten Kurve ist die zusätzliche Kraft wegen des Seilstops. Die Geschwindigkeit des Seildurchlaufs u beträgt 3000 mm/sec (magenta). ($\omega = 6.25 \text{ sec}^{-1}$, $v_0 = 9.185 \text{ m/sec}$, $s = 67.5 \text{ cm}$ (Gleichung (6.8)).

Der Fangstoß $F_R^0 = -ma^0(t) + mg$ für $u = 0$ ist bis weit nach dem Fangstoßmaximum positiv und wird deshalb durch den negativen zweiten Term verringert. Der dritte Term beinhaltet die "Stoppkosten" und ist genau der Zeit verschobene positive zweite Term. Man muss quasi die gewonnene Reduktion des Fangstosses zu einem späteren Zeitpunkt zurückzahlen, was die Krafteinwirkung verlängert. Trotzdem wird in der Regel der Kraftstoß (Kraft-Integral über die Zeit) durch ein $u > 0$ kleiner, da man dem System Energie durch den Seildurchlauf entzieht. Der Energiesatz lässt sich einfach aus (6.1) ableiten, indem man diese Gleichung mit \dot{y} multipliziert, so dass man

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{y}(t)^2 - mgy(t) + \frac{m\omega^2}{2} (y(t) - y_0(t))^2 + \int_0^t m u \omega^2 (y(t') - y_0(t')) dt' \right] = 0 \quad (6.6)$$

erhält. Der letzte Term $\int_0^t m u \omega^2 (y(t') - y_0(t')) dt'$ ist die Energie, die die Bremse aufnimmt.

Ist der Zeitpunkt t_a^{\max} des Maximums von $a(t, u)$ kleiner als t_e , gilt

$$a(t, u) = g \cos(\omega t) - v_0 \omega \sin(\omega t) + u \omega \sin(\omega(t - t_0)) = (g - u \omega \sin(\omega t_0)) \cos(\omega t) - (v_0 - u \cos(\omega t_0)) \omega \sin(\omega t)$$

mit dem Fangstossmaximum $F_1 = m \sqrt{(v_0 - u \cdot \cos(\omega t_0))^2 \omega^2 + (g - u \omega \sin(\omega t_0))^2} + mg$ und dem Grenzfall des kompletten Seildurchlaufs, wenn $u = v_0$ und $t_0 = 0$.

Ist der Zeitpunkt $t_a^{\max} > t_e$, dann gilt

$$F_2 = m \sqrt{(v_0 - u \cdot \cos(\omega t_0) + u \cdot \cos(\omega t_e))^2 \omega^2 + (g - u \omega \sin(\omega t_0) + u \omega \sin(\omega t_e))^2} + mg$$

Für das Maximum von F_R gibt es nur diese 2 Möglichkeiten, so dass

$$F_R^{\max} = \text{Max}(F_1, F_2) \quad (6.7)$$

Ziel ist es nun, F_R^{\max} mit Hilfe der Kontrollparameter t_0 und t_e bei vorgegebener Seildurchlaufstrecke

$$s = y_0^{\max} = u \cdot (t_e - t_0) \quad (6.8)$$

möglichst klein zu machen. Bei gewählten t_0 und t_e und gegebenem s ist u festgelegt und steht damit zur Optimierung von F_R^{\max} nicht mehr als Optimierungsparameter zur Verfügung.

In der folgenden Abb. 6-3 ist das kleinstmögliche F_R^{\max} , bei optimaler Wahl von t_0 und t_e dargestellt. Die Kontrollgeschwindigkeit u wird für große s konstant und beträgt dann (bei der Parameterwahl von Abschnitt 7) etwa $2/3 \cdot v_0$. t_e ist für kleinere s bis einem Meter praktisch konstant und steigt erst danach stärker an. Die Wirkung von s auf F_R^{\max} ist besonders groß für $0 < s < 1$ m und geht gegen Null für größere s .

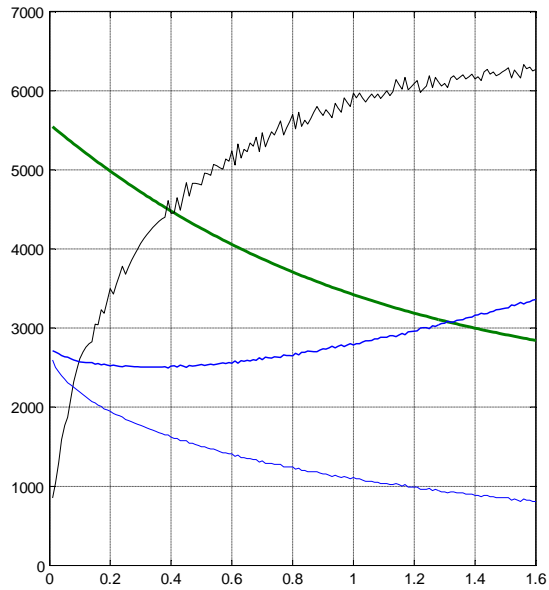


Abb.6-3: optimales (kleinstmögliches) Fangstossmaximum F_R [N] (grün) als Funktion des Seildurchlaufs s [m] und die dazugehörigen t_0 [10^{-4} sec] (blau), t_e [10^{-4} sec] (blau), u [10^{-3} m/sec] (schwarz).

In Abb.6-4 ist der zeitliche Verlauf des Fangstosses bei optimaler Kontrolle gezeigt. Zum Vergleich ist der Fangstoss ohne Kontrolle ($u=0$) blau mit eingezeichnet.

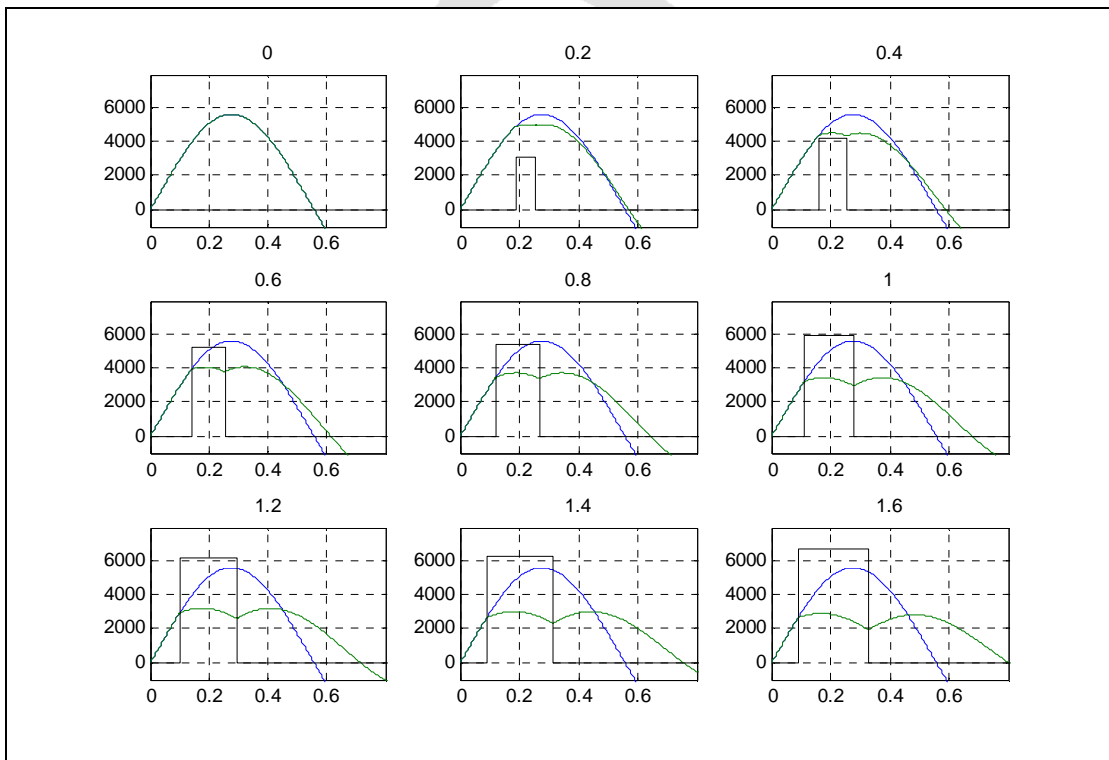


Abb.6-4: Zeitabhängigkeit von F_R (grün) aus Gleichung (6.5) für 9 verschiedene Seildurchlauf­längen von 0 bis 1.6 m. Die Parameter t_0 und t_e sind optimal gewählt. F_R^0 für $u = 0$ ist als Referenzkurve blau gezeichnet. Die schwarzen Kurven sind die optimalen Seildurchlauf­geschwindigkeiten u [10^{-3} m/sec].

Wir geben noch eine analytische Näherung für die Fangstossreduktion durch Seilkontrolle an. Wie man aus Abb.6-4 entnehmen kann, liegt erstens t_e ungefähr immer beim Maximum von F_R für $u = 0$, d.h. bei ungefähr

$$t_e \cong \frac{\pi}{2\omega}.$$

Zweitens sind die zwei Maxima der Beschleunigung bzw. des Fangstosses immer gleich groß. Wie auch anschaulich klar ist, wird F_R^{\max} gerade dann optimal, wenn die zwei Maxima von F_R (siehe Abb.6-4) gleich groß werden. Dadurch erhält man eine Beziehung zwischen t_0 und u :

$$t_0(u) = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2g}{u\omega}\right)\right). \quad (6.9)$$

Da F_R^{\max} als Funktion von u gegeben ist, ist folgende Parameterdarstellung zwischen F_R^{\max} und s mit u als Parameter möglich:

$$\left(\begin{array}{l} s(u) = u \cdot \left(\frac{\pi}{2\omega} - t_0(u) \right) \\ F_R^{\max}(u) \cong mg + m \sqrt{\left(u \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2g}{u\omega} \right)^2} \right) - v_0 \right)^2 \omega^2 + \left(\frac{1}{2} u \omega \right)^2} \end{array} \right) \quad (6.10)$$

Diese Näherung ist exzellent für $s \leq 1$ m.

Für etwas kleinere s kann man (6.10) nach s entwickeln und erhält für den durch s kontrollierten Fangstoss:

$$F_R^{\max}(s) \cong \left(mg + m \sqrt{v_0^2 \omega^2 + g^2} \right) \cdot \left(1 - \left(0.87 \cdot \frac{\omega}{v_0} - 1.12 \cdot \frac{g}{v_0^2} \right) s \right) \quad (6.11)$$

F_R^{\max} ist in dieser Näherung also durch die bekannte Fangstossformel $\left(mg + m \sqrt{v_0^2 \omega^2 + g^2} \right)$ gegeben, multipliziert mit einem Term linear in s , dessen Stärke im wesentlichen durch den Faktor ω/v_0 gegeben ist. Es ist auch anschaulich klar, dass ein bestimmtes s bei einem steifen Seil mit großem ω eine größere Wirkung hat bei einem Seil mit kleinerem ω . Ein großes v_0 benötigt hingegen ein größeres s für die gleiche Fangstossreduzierung.

Betrachtet man (6.11) für ein Schlappseil mit der Länge δ (was manche Kletterer auch als eine Art Kontrolle auffassen), muss man einerseits $v_0 = \sqrt{2gh}$ mit der durchfallenen Höhe h ändern zu $v_0 = \sqrt{2g(h+\delta)}$, weil sich die Fallhöhe um das Schlappseilstück δ vergrößert hat, aber andererseits enthält $\omega = \sqrt{k/m}$ das längenabhängige, durch δ etwas verkleinerte $k = EL_0/(L+\delta)$, so dass man für kleine δ/L

$$F_R^{\max}(0) = mg + m \sqrt{v_0^2 \omega^2 + g^2} \approx mg + \sqrt{2mgEq \cdot \left(f + (1-f) \frac{\delta}{L} \right) + (mg)^2} \quad (6.12)$$

erhält, was für einen Sturzfaktor $f > 1$ erstaunlicherweise durch Schlappseil verkleinert wird. Für Einseillängenrouten ist jedoch ein Sturzfaktor $f > 1$ nicht möglich, so dass Schlappseil dort,

wo man es am häufigsten beobachtet, nämlich in der Kletterhalle oder im Klettergarten, immer zu vermeiden ist.

Es wird noch ein einfaches Modell zur Körpersicherung angesprochen, das in der folgenden Abbildung 6-5 dargestellt ist. Die Masse m_0 des Sichernden wird bei einem Sturz durch die Masse m des Stürzenden hochgerissen. Der Sichernde hat die Möglichkeit, mit einer von ihm zu wählenden Geschwindigkeit u hoch zu springen und auf diese Weise den Sturz zu kontrollieren. In der Näherung des reibungsfreien Oszillatormodells ($\omega = \sqrt{k/m}$) erhält man folgende schöne Fangstossformel, die ohne Herleitung angegeben wird:

$$\bar{F}_R^{HO} = m_{\text{red}} 2g + m_{\text{red}} \cdot \sqrt{\Omega^2 \cdot (v_0 - u)^2 + (2g)^2} \quad \text{mit} \quad m_{\text{red}} = \frac{m \cdot m_0}{m_0 + m} \quad \text{und} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m_{\text{red}}},$$

was zu vergleichen ist mit der bekannten Fangstossformel aus (6.12) (siehe [1])

$$F_R^{HO} = mg + m \sqrt{v_0^2 \omega^2 + g^2}.$$

m_{red} ist die reduzierte Masse, und da sie immer kleiner ist als m , verkleinert sie den Fangstoss. Ω wird durch m_{red} immer größer als ω , so dass die Stürze zeitlich kürzer werden. u verkleinert die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Stürzenden und verringert so auch den Fangstoss.

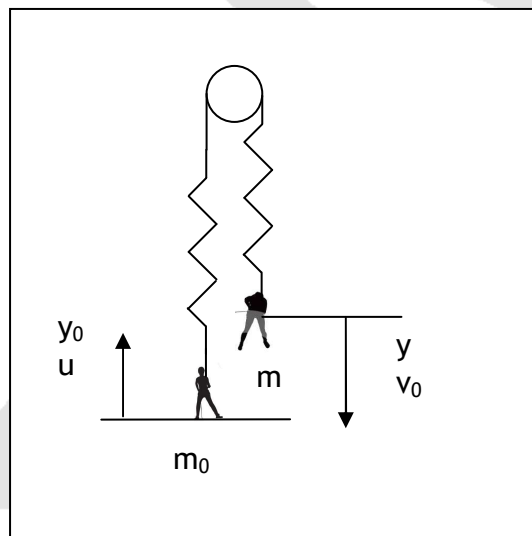


Abb.6-5: Einfaches Modell zur Körpersicherung

6.2. Seilkontrolle mit innerer und äußerer Reibung

Analog zu Abb.6-4 ist in Abb.6-6 der Zeitverlauf von F_R bei optimaler Seilkontrolle dargestellt, wenn beide Reibungsarten vorhanden sind. Die Ergebnisse sind durch die Lösung des Gleichungssystems (4.4) und anschließender Minimierung von F_R^{\max} als Funktion des Seildurchlaufs y_0 entstanden. Die benutzten Parameter sind die von Abschnitt 6.1.

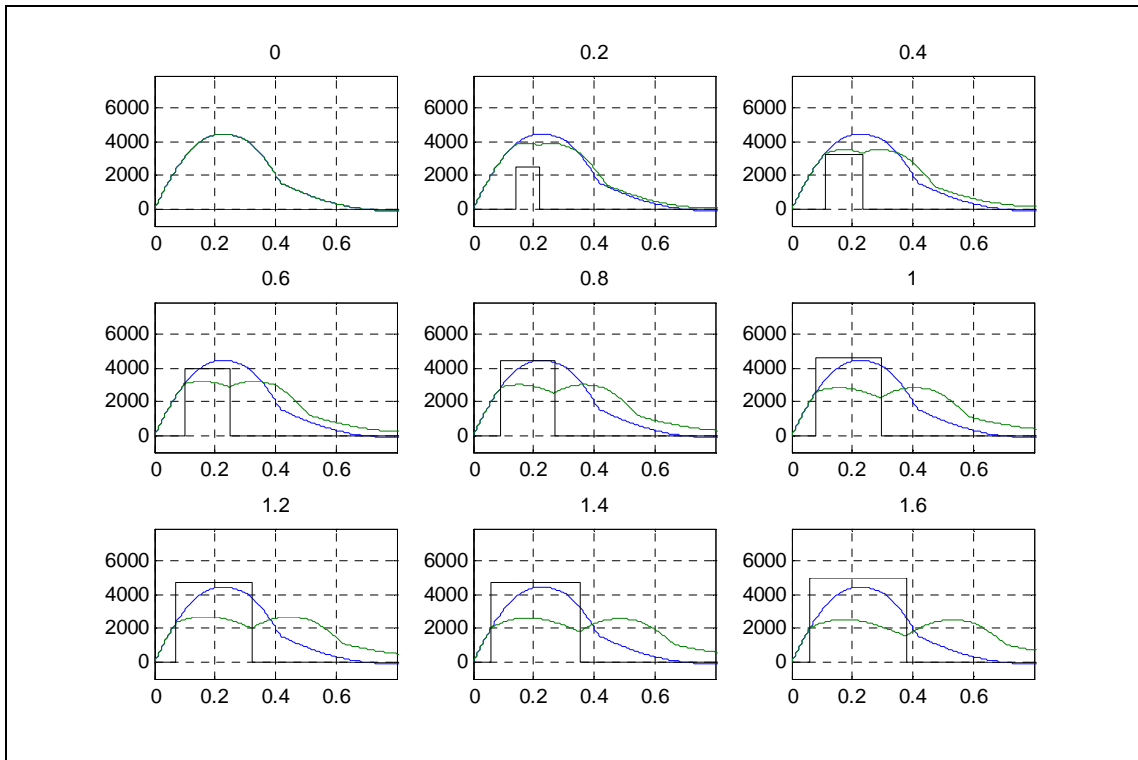


Abb.6-6: F_R (grün) für 9 verschiedene Seildurchlaufängen von 0 bis 1.6 m als Funktion der Zeit, berechnet mit den Gleichungen (4.4). Die innere Reibung ist $\eta=0.8 \cdot 10^3$ [Nsec/m], die äußere Reibung $\rho=1.46$. Die Parameter t_0 und t_e sind optimal gewählt, so dass das Maximum von F_R minimiert wird. F_R^0 für $u = 0$ ist als Referenzkurve blau gezeichnet. Die schwarzen Kurven sind die optimalen Seildurchlaufgeschwindigkeiten u [in 10^{-3} m/sec].

Auch hier fällt auf, dass für größere $s > 1$ m keine nennenswerte Fangstoßreduktion mehr erfolgt (siehe die 3 untersten Abbildungen in 6-6). Außerdem ist der relativ frühe Stopp des Seildurchlaufs (siehe Abb.6-7) bemerkenswert: zu lange Durchlaufzeiten führen nicht mehr zu einer Reduktion sondern nur zu einer Verlängerung der Krafteinwirkung. Außerdem führen lange Durchlaufstrecken dem System "Kletterer + Seil" Energie zu, die zusätzlich in Wärme umgewandelt werden muss.

Eine typische "kraftgesteuerte" Bremse wird nicht in der Nähe des Kraftmaximums stoppen, sondern erst dann, wenn eine bestimmte Kraft unterschritten ist. Vermutlich ist dies auch der Grund, warum die experimentellen Fangstossreduktionen (siehe Abschnitt 7, Abb. 7-9) nicht optimal sind.

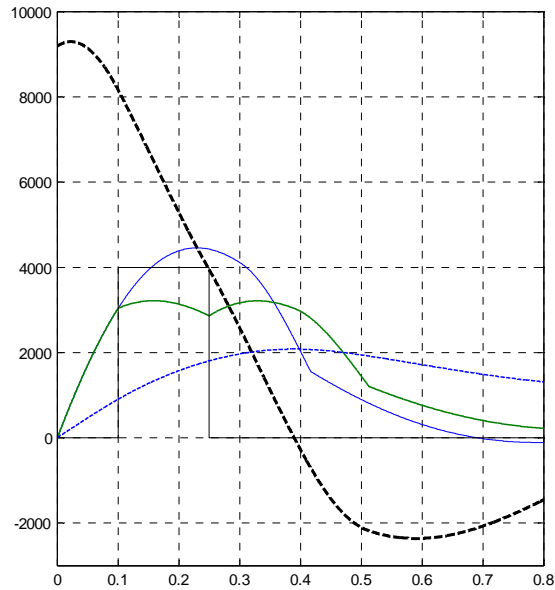


Abb.6-7: Vergrößerte vierte Abbildung aus Abb.6-6 mit $s = 60$ cm. Das Ende des optimalen Seildurchlaufs y_0 findet schon früh in der Nähe des Kraftmaximums statt, obwohl die Sturzmasse noch eine hohe Geschwindigkeit (schwarz gestrichelt) hat und die maximale Dehnung (blau gestrichelt) längst nicht erreicht ist.

In der nächsten Abbildung 6-8 ist der Zeitverlauf aller dissipativen Energien gezeigt. Diese sind alle von gleicher Größenordnung und addieren sich für Zeiten von etwas größer als 1 sec zur Gesamtenergie.

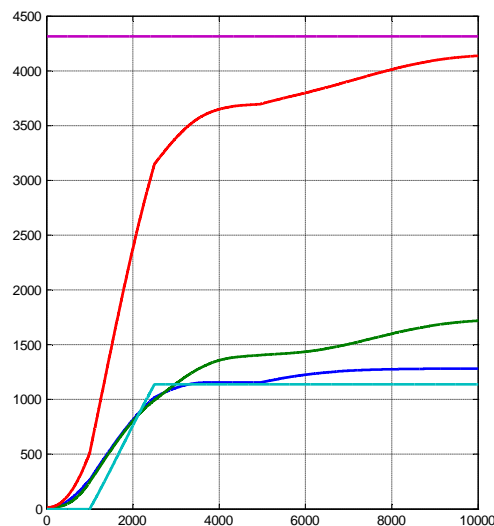


Abb.6-8: Zeitverlauf in $[10^{-4} \text{ sec}]$ der Energieabsorption beim Sichernden (cyan), durch innere (grün) und äußere Reibung (blau). Die Summe aller drei dissipativen Energien ist die rote Kurve, die asymptotisch gegen die Gesamtenergie (magenta) geht. Der Seildurchlauf ist 51 cm.

7. Vergleich mit Experimenten

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Ergebnisse, insbesondere die Lösung des Gleichungssystems (4.4) mit Messungen, die von der DAV Sicherheitsforschung [3] durchgeführt wurden, verglichen.

Die Sturzversuche sind charakterisiert durch:

$$\begin{aligned}
 &\text{Sturzmasse } m = 82 \text{ [kg]} \\
 &\text{Anfangsgeschwindigkeit der Sturzmasse } v_0 = 9.185 \text{ [m/sec]} \\
 &\text{Seillänge vor der Umlenkung } L_1 = 6.95 \text{ [m]} \\
 &\text{Seillänge nach der Umlenkung } L_2 = 3.4 \text{ [m]} \\
 &\text{Gesamtseillänge } L = 10.35 \text{ [m]} \\
 &\text{Parameter der äußeren Reibung } \rho = 1.46
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Allen hier diskutierten Messungen liegt ein Seil mit folgenden Parametern zugrunde:

$$k_2 = 3.2 \cdot 10^3 \text{ [N/m]}, \quad k_1 = 1.8 \cdot 10^3 \text{ [N/m]}, \quad \eta = 0.8 \cdot 10^3 \text{ [Nsec/m]}$$

was den Materialparametern

$$E_2 = 0.42 \text{ [GPa]}, \quad E_1 = 0.24 \text{ [GPa]}, \quad \eta = 0.1 \text{ [GPasec]}$$

entspricht. In Abb. 7-1 sind die Messkurven von F_R und F_S und die zugehörigen Kurven aus der Theorie als Funktion der Zeit gezeigt. Der Seildurchlauf beträgt für diesen Versuch nur wenige Zentimeter und ist daher vernachlässigbar.

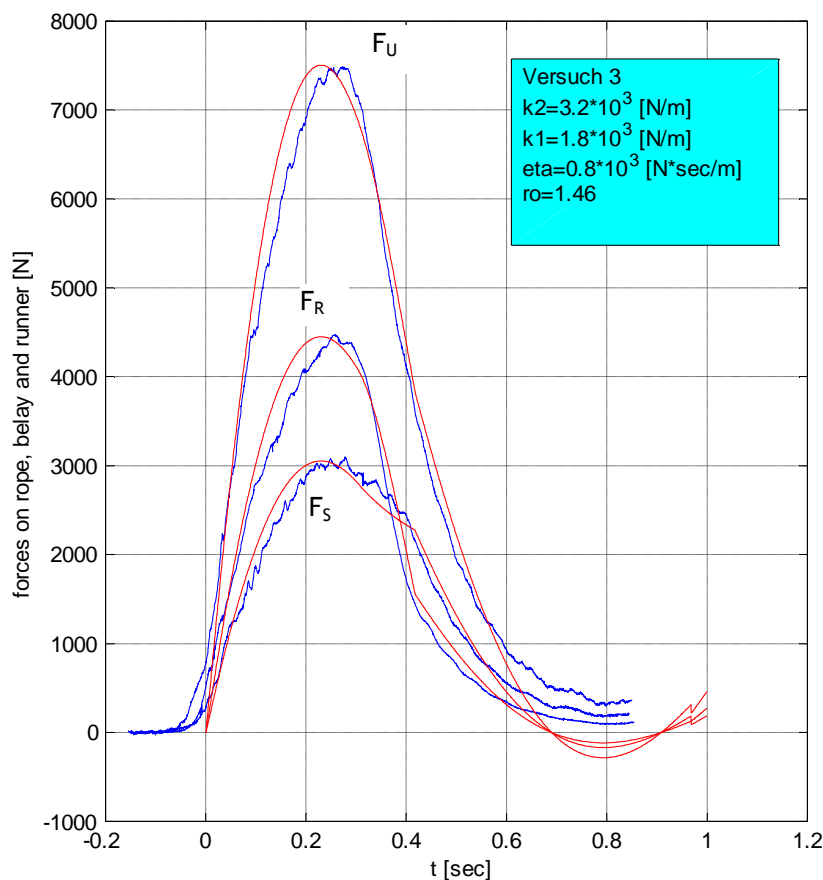


Abb.7-1: F_R , F_S und ihre Summe F_U , als Kraft auf die Umlenkung mit vernachlässigbarem Seildurchlauf $s \approx 0$. Messungen in blau, theoretische Kurven in rot.

Die zum obigen Versuch gehörige (nicht gemessene) Seildehnung y_{22} an der Sturzmasse, deren Geschwindigkeit v_{22} und Beschleunigung $-a_{22}$ sind in Abb.7-2 zu finden.

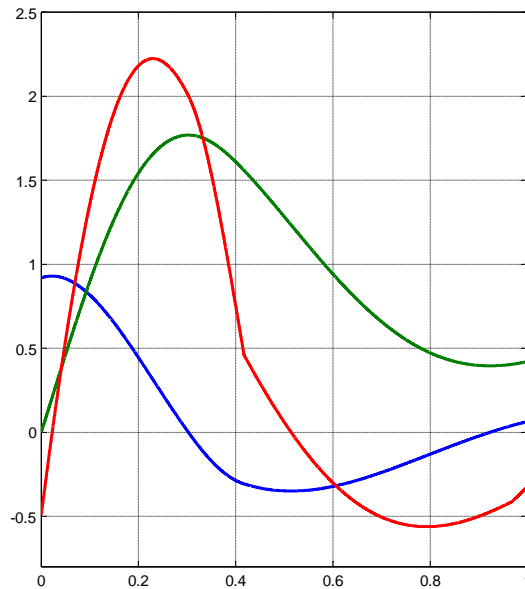


Abb.7-2: Seildehnung y_{22} [m] an der Sturzmasse (grün), deren Geschwindigkeit v_{22} [10m/sec] (blau) und Beschleunigung $-a_{22}$ [20m/sec²] (rot) als Funktion der Zeit.



Abb.7-3: Fangstoss-Sturzzug Verhältnis

Für denselben Versuch ($s=0$) ist in Abb.7-3 das gemessene (blau) und berechnete (rot) Fangstoss-Sturzzug Verhältnis F_R/F_S dargestellt. Es wurde in Abschnitt 2 gezeigt, dass vor dem

Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit $\rho = F_R/F_S$ und anschließend $F_R/F_S = 1/\rho$ gilt, was experimentell bestätigt wird. In der Abbildung 7-4 ist die Reibungskraft $R = F_S - F_R$ gezeigt. Auch hier zeigt die gute Übereinstimmung mit dem Experiment, dass das verwendende einfache Coulomb'sche Reibungsmodell einen realen Sturz richtig beschreibt.

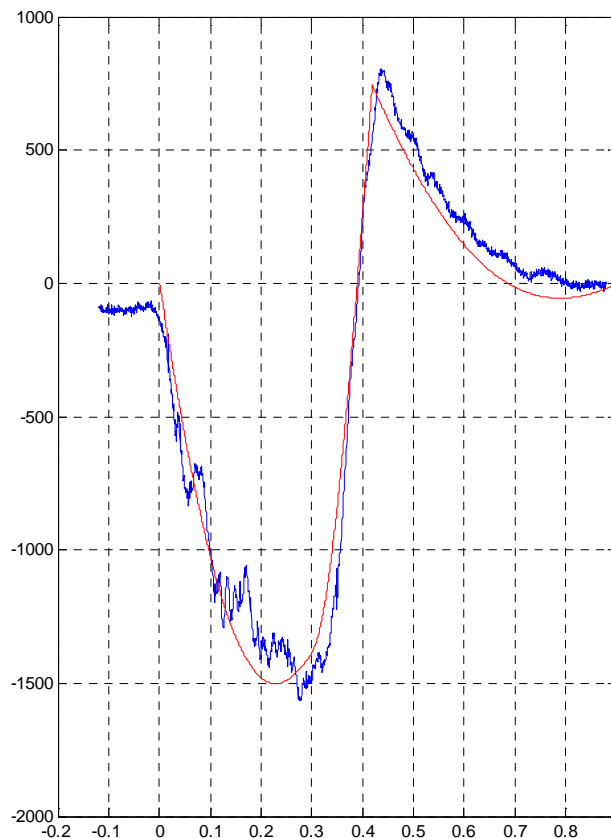


Abb.7-4: Reibungskraft R als Funktion der Zeit

Nun werden 4 Sturzversuche gezeigt, die einen größeren Seildurchlauf s (ansteigend von 44cm bis 91cm) haben und mit den theoretischen Ergebnissen verglichen.

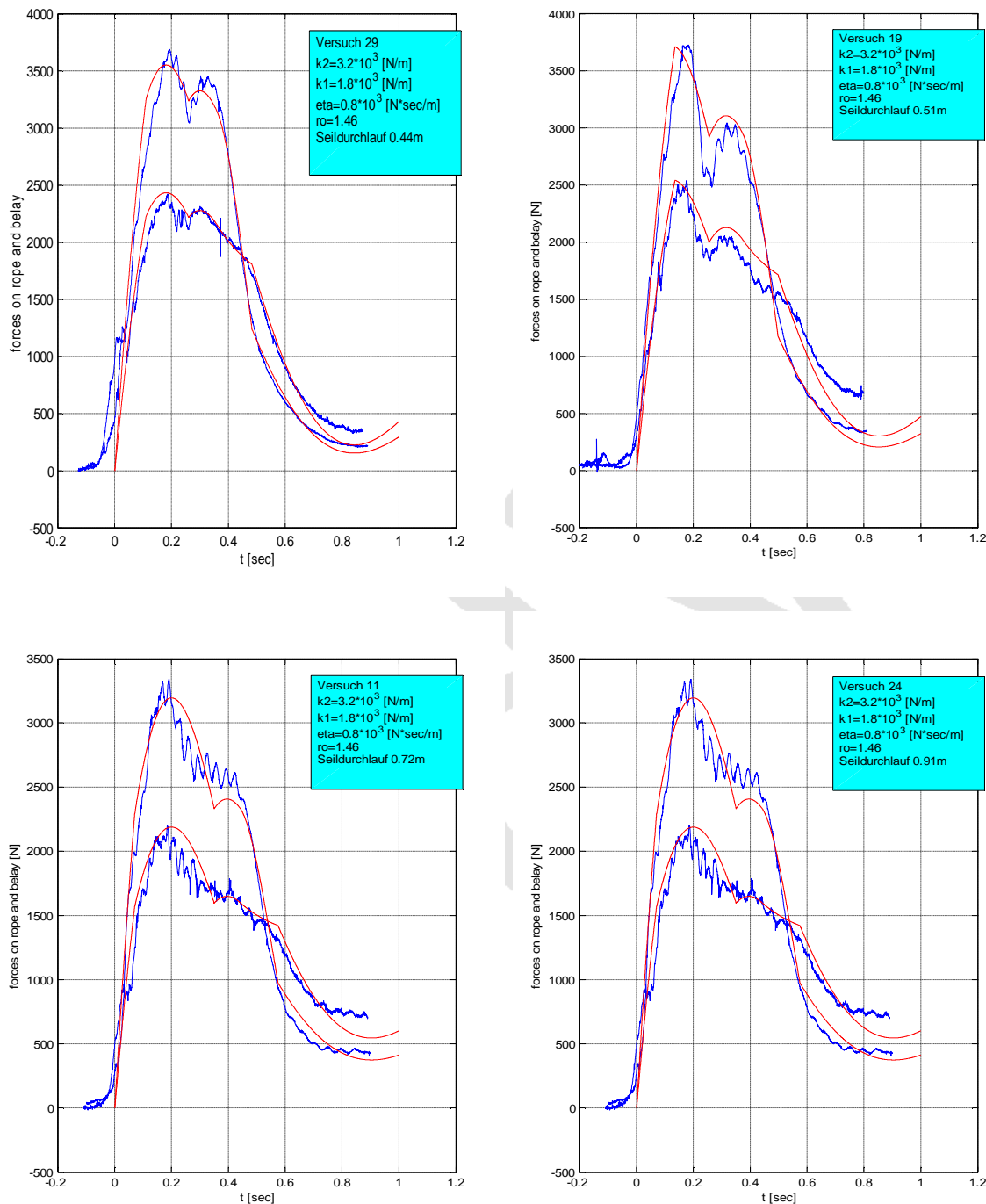


Abb.7-5 bis 7-8: Messkurven (blau) und theoretische Kurven (rot) von F_R und F_S als Funktion der Zeit für verschiedene Seildurchlaufstrecken s .

In der nächsten Abb.7-9 sind alle verfügbaren experimentellen relativen Fangstossreduzierungen $F_R^{\max}(s)/F_R^{\max}(0)$ als Kreise dargestellt. $F_R^{\max}(0)$ wurde durch Mittelung von 4 gleichen Versuchen gewonnen, so dass $F_R^{\max}(s)/F_R^{\max}(0)$ für $s \rightarrow 0$ auch etwas größer als eins werden kann. Die rote Kurve ist die maximal mögliche theoretische Fangstossreduktion bei gegebenem s . Die Messwerte müssen immer oberhalb oder auf dieser Kurve liegen, was bis auf

einen Punkt auch erfüllt ist. Es fällt auf, dass die gemessenen Fangstossreduktionen stark streuen und deutlich von der optimalen Kurve entfernt sind.

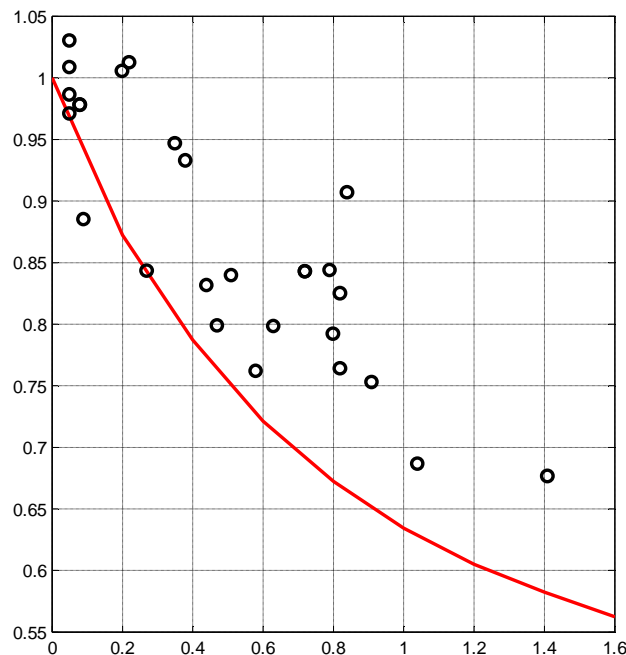


Abb.7-9: Fangstossreduktion als Funktion des Seildurchlaufs bei insgesamt 27 Versuchen (Kreise) und die theoretisch maximal mögliche Reduktion (rote Kurve). Die meisten realen, kontrollierten Fangstöße sind deutlich von der Optimalität entfernt.

8. Schlussfolgerungen

Durch die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist sichergestellt, dass ein lineares viskoelastisches SLS - Modell eine sehr gute Beschreibung eines Kletterseils liefert. So konnte mit zwei Parametern (ein Elastizitätsmodul und die Viskosität, der zweite Elastizitätsmodul ist für kurze Zeiten nur von geringer Bedeutung) charakteristisch für ein spezielles Seil, eine ganze Reihe unterschiedlicher Sturzversuche mit diesem Seil erklärt werden.

Die hinzukommende äußere Reibung, die ebenfalls durch das verwendete Modell richtig beschrieben wird und die Messungen erklären kann, macht aus dem bisher linearen ein nichtlineares, komplizierteres Modell. Die unteren Abbildungen 8-1 versuchen nochmals zu verdeutlichen, dass beide Reibungsarten, die äußere wie die innere, für typische Stürze mit nicht zu hohem Sturfaktor wichtig sind.

Das oft verwendete Modell des harmonischen Oszillators (Abb. 8-1a) reicht nicht aus, die Kräfte die bei einem Sturz auftreten, zu erklären. Die äußere Reibung (Abb.8-1b) ist dafür verantwortlich, dass die Kräfte F_R und F_S überhaupt voneinander verschieden sind. Je größer die äußere Reibung wird, desto größer wird die Kraft F_R auf die Sturzmasse und desto geringer werden die Kraft F_S auf die Sicherung und gleichzeitig die Einflussmöglichkeiten des Sichernden. Die innere Reibung (Abb.8-1c) ist wichtig für die Absorption der Sturzenergie, verhindert daher das Nachschwingen des Seils und verringert außerdem F_R wesentlich. Beide Reibungsformen (Abb.8-1d) zusammen können die Kräfte auf die Sturzmasse und auf den Sichernden gut erklären.

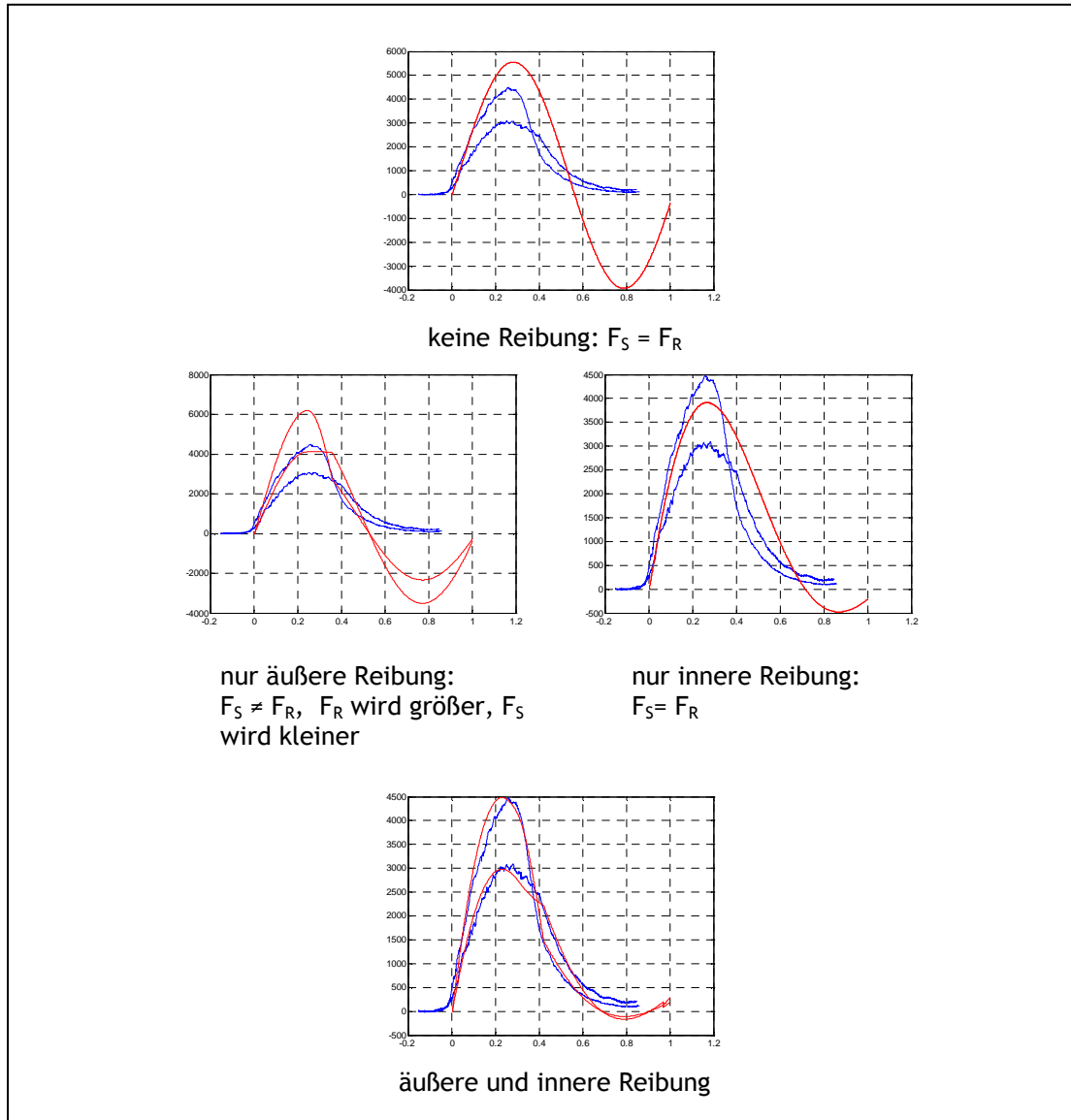


Abb.8-1a,b,c,d: Zeitverlauf der Kräfte an der Sturzmasse und an der Sicherung. Die theoretisch ermittelten Kurven sind rot gezeichnet, die experimentellen, immer gleichen Referenzkurven blau.

Ein wesentlicher Teil der Arbeit untersucht die Reduktion des Fangstossmaximums durch Kontrolle des Sichernden. Die optimale Seilkontrolle (mit der bestmöglichen Reduktion bei vorgegebenem Seildurchlauf) ermöglicht auch schon bei mittleren Durchlaufstrecken eine deutliche Fangstossreduktion (siehe Abb.7-9) und erfolgt durch relativ frühes Stoppen des Seildurchlaufs in der Nähe des Kraftmaximums. Da Seilbremsen offenbar nicht die optimalen Start- und Stoppzeitpunkte einhalten, liefern sie praktisch alle nur suboptimale Ergebnisse.

9. Acknowledgment

Mein besonderer Dank gilt Chris Semmel von der DAV Sicherheitsforschung, der mir die Messergebnisse freundlicherweise zur Verfügung gestellt hat.