Bayes und GAUs

Wahrscheinlichkeitsaussagen zu künftigen Unfällen in Kernkraftwerken nach Fukushima, Tschernobyl, Three Mile Island

Ulrich Leuthäusser

(01.04.2011)

Einleitung

Ziel dieser kurzen Arbeit ist es, mit Hilfe des Bayes'schen Satzes die Wahrscheinlichkeit für den nächsten Super-GAU in Atomkraftwerken (AKWs) abzuschätzen. Das Ergebnis ist eine einfache Formel, mit deren Hilfe man außerdem die unterschiedlichen Positionen gegenüber der Kernkraft durchleuchten kann.

Die Bayes'sche Vorgehensweise beginnt mit der Festlegung einer a priori Wahrscheinlichkeit P(H) der Menge möglicher Hypothesen H, bevor Daten zur Verfügung stehen. Nach Bekanntwerden von Daten D kann man nun mit Hilfe der a posteriori Verteilung

$$P(H \mid D) = \frac{P(H) \cdot P(D \mid H)}{P(D)}$$

auf die geänderte Wahrscheinlichkeit von H schließen. In unserem Fall beschreibt H die Unfallhäufigkeit.
Die Daten D sind sowohl die störungsfreien Jahre als auch die stattgefundenen Unfallereignisse. Aus a priori (Un)-Wissen und a priori Annahmen zusammen mit neuer Information durch die Beobachtungen entsteht so genaueres Wissen über H.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Unfalls in den nächsten Jahren

Es sei p die Wahrscheinlichkeit eines Super-GAUs (im Folgenden nur als GAU bezeichnet) pro Jahr für ein AKW. Die a priori Verteilung von p sei

$$f_0(p) = (1-p)^m (m+1)$$

Der Erwartungswert von p beträgt $\int_0^1 f_0(p) p\,dp = \frac{1}{m+2}$. m ist also die mittlere Anzahl störungsfreier a priori Betriebsjahre. Setzt man m = $2.5 \cdot 10^4$, dann nimmt man an, dass nur alle 25.000 Jahre ein GAU in einem AKW passiert.

Die Wahrscheinlichkeit einer Wahrscheinlichkeit p erscheint merkwürdig, ist aber im Rahmen einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsauffassung, wenn p nicht genau bekannt ist, ganz normal. Die Wahl der a priori Verteilung f_0 ist ein heikler Punkt in der Bayes'schen Methode. Im vorliegenden Fall wird für f_0 eine (spezielle) Betaverteilung gewählt, weil damit p in den richtigen Grenzen liegt, weil f_0 konjunktiv ist (d.h. sie gehört zur gleichen Familie wie die entstehende a posteriori Verteilung) und weil f_0 in Abhängigkeit von m ein breites Spektrum von Verteilungen bis hin zur Gleichverteilung (m=0) bietet.

Für das Ereignis $E_0(i)$ = "kein Unfall innerhalb n Jahre in AKW i" ist die Wahrscheinlichkeit

$$P(E_0(i) \mid p) = (1-p)^n .$$

Für die Wahrscheinlichkeit von $E_1(i)$ = "1 Unfall im AKW i im n-ten Jahr nach n-1 unfall-freien Jahren" gilt

$$P(E_1(i) \mid p) = p(1-p)^{n-1}$$

Wie gleich klar wird, formulieren wir P explizit als bedingte Verteilung. Laufen N-1 AKWs n Jahre unfallfrei und eines hat nach n-1 unfallfreien Jahren im n-ten Jahr einen Unfall, dann ist die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$P(E_0(1), E_0(2), \ldots E_0(N-1), E_1(N) \mid p) = p(1-p)^{Nn-1} .$$

Dabei hat man bedingte Unabhängigkeit zwischen den AKWs vorausgesetzt, also

$$P(E_0(1),E_0(2),\ldots E_0(N-1),E_1(N)\,|\,p)=P(E_0(1)\,|\,p)\cdot P(E_0(2)\,|\,p)\ldots\cdot P(E_1(N)\,|\,p)$$

und man kann daher leicht mit Hilfe des Bayes'schen Satzes die a posteriori Verteilung bestimmen:

$$P(p\,|\,E_0(1),E_0(2),\ldots E_0(N-1),E_1(N))=\frac{P(E_0(1)\,|\,p)\cdot P(E_0(2)\,|\,p)\ldots\cdot P(E_1(N)\,|\,p)f_0(p)}{\int_0^1 P(E_0(1)\,|\,p)\cdot P(E_0(2)\,|\,p)\ldots\cdot P(E_1(N)\,|\,p)f_0(p)dp}=$$

$$=P(p\,|\,1\ \text{GAU nach n Jahren})=\frac{p(1-p)^{m+Nn-1}(m+1)}{(m+1)\int_0^1 p(1-p)^{m+Nn-1}dp}=p(1-p)^{m+Nn-1}(Nn+m+1)(m+Nn)$$

Allgemein erhält man

$$P(p\,|\,x\ \text{GAUs innerhalb n Jahren})\cong\frac{(m+Nn+1)!}{x!\,(m+Nn-x)!}p^x(1-p)^{m+Nn-x}=Bt(x+1,m+Nn-x+1)$$

wobei Bt(a,b) die Betaverteilung ist.

In der letzten Gleichung wurden die wegfallenden restlichen Betriebsjahre eines AKWs mit einem GAU nicht berücksichtigt, was für große Nn >>1 eine gute Näherung ist.
In Wirklichkeit variiert m und ist vom Kraftwerkstyp, von der geografischen Lage, etc., abhängig. Dies ließe sich durch eine zusätzliche Verteilung von m beschreiben mit der Bt gemittelt werden würde. Alterungsprozesse werden hier, um die Beschreibung möglichst einfach zu halten, ebenfalls nicht berücksichtigt.

Mit Hilfe dieser Verteilung kann man nun berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit $P(k\,|\,x)$ ist, dass in den nächsten k Jahren mindestens ein Unfall passiert, wenn sich bereits in den vorangegangenen n Jahren x Unfälle ereignet haben. Man erhält:

$$P(k\,|\,x)=1-\int_0^1(1-p)^{kN}P(p\,|\,x\ \text{GAUs nach n Jahren})dp=1-\frac{\prod_{i=0}^{x}(Nn+m+1-i))}{\prod_{i=0}^{x}(Nk+Nn+m+1-i))}$$

Da x << Nn+m gilt

$$\boxed{P(k\,|\,x)\cong 1-\left(\frac{Nn+m}{Nk+Nn+m}\right)^{x+1}}$$

Dies ist eine sehr einfache Formel, die nur von der störungsfreien a priori Laufzeit m, der stattgefundenen unfallfreien Laufzeit aller AKWs N·n, der kommenden störungsfreien Laufzeit N·k und der Anzahl der stattgefundenen Unfälle x abhängt. Von allen vorkommenden Größen ist nur m nicht genau bekannt. Wie zu erwarten, wird es einfach zu den störungsfreien Betriebsjahren N·n der AKWs addiert.

Diskussion

Atomkraftbefürworter werden m sehr groß ansetzen (ein großes m bedeutet ja großes Vertrauen in die Zuverlässigkeit eines AKWs), da dann P(k|0) gegen 0 geht und deshalb die Unfallanzahl x keine Rolle mehr spielt. Für diese Gruppe spielt auch ein Unfall praktisch keine Rolle, weil dP/dx für große m gegen 0 geht.

Personen, die das Risiko der Atomkraft höher einschätzen, werden m kleiner wählen und je kleiner m wird, desto mehr Bedeutung bekommen die aufgetretenen Unfälle. Für diese Gruppe ändert sich die Welt nach einem neuen Unfall stärker.

In der unteren Abbildung sind verschiedene P(k|x) als Funktion der zukünftigen Jahre k aufgetragen. Gewählt wurde $m = 2.5 \cdot 10^4$, n = 40 (unfallfreie Jahre pro Reaktor) und N = 442 (weltweit laufende) Reaktoren. Selbst wenn bisher kein Störfall aufgetreten wäre (x=0), beträgt die Wahrscheinlichkeit P(20|0), dass in den kommenden 20 Jahren ein GAU auftritt, immerhin knapp 20%.

Dies ist verblüffend, weil man ja das sog. "Restrisiko" 1/m so klein gewählt hat. Aber die große Anzahl von 442 Reaktoren erhöht dieses "Restrisiko" beträchtlich. Das Ergebnis zeigt außerdem, dass die a priori Annahmen konsistent mit der Wirklichkeit sind, also m in der richtigen Größenordnung liegt. Ein zu großes m mit einem P<<1 kann daher ausgeschlossen werden, da es nicht mit den bisher eingetretenen Ereignissen zusammenpasst.

Nach den drei Super-GAUs Fukushima, Tschernobyl und Three Mile Island ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 20 Jahren wieder ein ähnlicher Unfall passiert, auf über 50% angewachsen! Schlussfolgerungen daraus möge jeder selbst ziehen.

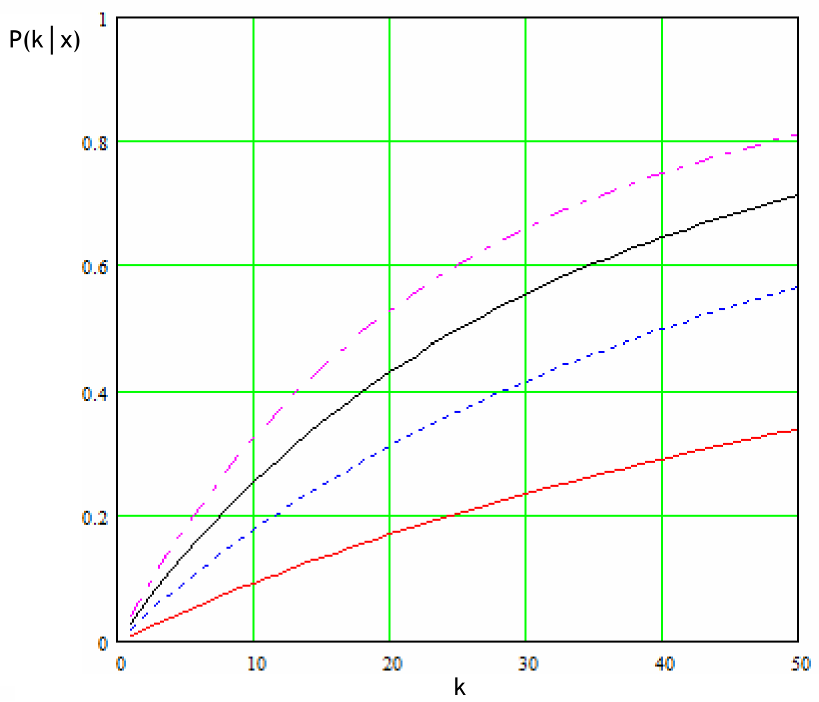

Abb.: Wahrscheinlichkeit P(k|x) für einen Super-GAU in den nächsten k Jahren mit den obigen Annahmen für m, n und N, wenn in der Vergangenheit kein Unfall stattgefunden hat (rote Kurve), 1 Unfall stattgefunden hat (blaue Kurve), 2 Unfälle stattgefunden haben (schwarze Kurve), 3 Unfälle stattgefunden haben (magenta Kurve)